# Ograniczenie górne w problemie Grahama-Rothschilda

Eryk Tadeusz Lipka

Koło Matematyków Studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego im. prof. Stanisława Zaremby
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Seminarium Matematyka Dyskretna, 26 listopada 2020

# Wstęp

## O czym będzie mowa?

Na początku referatu wprowadzimy tematykę Teorii Ramseya oraz klasyczne problemy tej teorii. W drugiej części rozważymy zagadnienie znane jako problem Grahama-Rothschilda. Pierwsze historycznie oszacowania na rozwiązanie tego problemu dają się w sposób zwarty opisać dopiero przy użyciu funkcji typu Ackermana, natomiast my zaprezentujemy najnowsze wyniki które dają ograniczenie przy użyciu zaledwie tetracji.

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.

# Teoria Ramseya

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.

Ograniczenia od dołu są mniej lub bardziej brute-force, a ograniczenia od góry są niekonstruktywne.

3

# Teoria Ramseya

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.

Ograniczenia od dołu są mniej lub bardziej brute-force, a ograniczenia od góry są niekonstruktywne.
Sporo wyników nie daje się opisać pierwotnie rekurencyjnie.

# Notacja Strzałkowa

4

# Notacja Strzałkowa

Donald Knuth (ten od TEX'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 \text{ dla } b = 0 \\ a^b \text{ dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) \end{cases}$$

# Notacja Strzałkowa

Donald Knuth (ten od TEX'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 \text{ dla } b = 0 \\ a^b \text{ dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) \end{cases}$$

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdots^{a}}}$$

# Notacja Strzałkowa

Donald Knuth (ten od $\TeX$'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 \text{ dla } b = 0 \\ a^b \text{ dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) \end{cases}$$

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\cdots^{a}}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots a \uparrow\uparrow a) \ldots))$$

# Klasyczne przykłady I

**Twierdzenie Van der Waerdena (1927)**

$\forall_{c,k\in\mathbb{Z}_+}\exists_{W\in\mathbb{Z}}$, że $W$-elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na $c$ kolorów posiada jednokolorowy $k$-elementowy podciąg arytmetyczny.

# Klasyczne przykłady I

**Twierdzenie Van der Waerdena (1927)**

$\forall_{c,k\in\mathbb{Z}_+}\exists_{W\in\mathbb{Z}}$, że $W$-elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na $c$ kolorów posiada jednokolorowy $k$-elementowy podciąg arytmetyczny.

$W(2,3) \geq 9$, bo $(r, b, b, r, b, r, r, b)$

# Klasyczne przykłady I

### Twierdzenie Van der Waerdena (1927)

$\forall_{c,k \in \mathbb{Z}_+} \exists_{W \in \mathbb{Z}}$, że $W$-elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na $c$ kolorów posiada jednokolorowy $k$-elementowy podciąg arytmetyczny.

$W(2,3) \geq 9$, bo $(r, b, b, r, b, r, r, b)$ , ale udowodnienie że jest równość to babranie się przypadkami.

# Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

| | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 27 | 76 |
| 4 | 35 | 293 | |
| 5 | 178 | | |
| 6 | 1132 | | |

# Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

| | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 27 | 76 |
| 4 | 35 | 293 | |
| 5 | 178 | | |
| 6 | 1132 | | |

Szacowanie dolne $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{k\gg 0} W(2,k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}$; $\qquad W(c,k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$

# Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

| | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 27 | 76 |
| 4 | 35 | 293 | |
| 5 | 178 | | |
| 6 | 1132 | | |

Szacowanie dolne $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{k\gg 0} W(2,k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}$; $\qquad W(c,k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$

Szacowanie górne $W(c,k) \leq 2^{2^{c^{2^{2^{k+9}}}}}$

# Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

| | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 27 | 76 |
| 4 | 35 | 293 | |
| 5 | 178 | | |
| 6 | 1132 | | |

Szacowanie dolne $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{k\gg 0} W(2,k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}$; $\qquad W(c,k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$

Szacowanie górne $W(c,k) \leq 2^{2^{c^{2^{2^{k+9}}}}}$, Graham oferował 1000$ za udowodnienie $W(2,k) \leq 2^{k^2}$.

# Klasyczne przykłady III

**Twierdzenie Ramseya (1930)**

Dla dowolnej $c$-krotki $r_1, \ldots, r_c \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie duże $N$, że dla każdego $c$-kolorowania $K_N$ mamy dla pewnego $i$ podklikę $K_{r_i}$ koloru $i$.

# Klasyczne przykłady III

**Twierdzenie Ramseya (1930)**

Dla dowolnej $c$-krotki $r_1, \ldots, r_c \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie duże $N$, że dla każdego $c$-kolorowania $K_N$ mamy dla pewnego $i$ podklikę $K_{r_i}$ koloru $i$.

Znamy 11 nietrywialnych wartości, z czego tylko dwie dla $c > 2$.

# Podprzestrzenie kombinatoryczne

# Podprzestrzenie kombinatoryczne

Ustalamy $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz $G < S_k$.

Zbiór $\{1, \ldots, k\}^N = [k]^N$ nazywamy przestrzenią kombinatoryczną. Jego podzbiór nazywamy $d$-**wymiarową podprzestrzenią kombinatoryczną**, gdy jest obrazem $[k]^d$ przez bijekcję, która na każdej współrzędnej ma stałą bądź $g(x_i)$ dla pewnego $g \in G, i \in \{1, \ldots, d\}$.

# Podprzestrzenie kombinatoryczne

Ustalamy $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz $G < S_k$.

Zbiór $\{1, \ldots, k\}^N = [k]^N$ nazywamy przestrzenią kombinatoryczną. Jego podzbiór nazywamy $d$-**wymiarową podprzestrzenią kombinatoryczną**, gdy jest obrazem $[k]^d$ przez bijekcję, która na każdej współrzędnej ma stałą bądź $g(x_i)$ dla pewnego $g \in G, i \in \{1, \ldots, d\}$.

Przykładowo $f(x, y, z) = (2, x, x, s(x), y, 3, z, -y)$ dla $d = 3, N = 8, k > 3, G = \langle -\mathrm{Id}, s \rangle$.

**Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)**

$\forall_{k,d,c \in \mathbb{Z}_+} \exists_{N \in \mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna $d$-wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.

## Klasyczne przykłady IV

**Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)**

$\forall_{k,d,c\in\mathbb{Z}_+}\exists_{N\in\mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna $d$-wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.
Liczby Halesa-Jewetta $G = \{\mathrm{Id}\}, N = HJ(k, c, d)$.

# Klasyczne przykłady IV

## Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall_{k,d,c \in \mathbb{Z}_+} \exists_{N \in \mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna $d$-wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.
Liczby Halesa-Jewetta $G = \{\mathrm{Id}\}, N = HJ(k, c, d)$.
Liczby Kółka-Krzyżyka $G = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}, N = TTT(k, c, d)$.

# Klasyczne przykłady IV

## Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall_{k,d,c\in\mathbb{Z}_+}\exists_{N\in\mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna $d$-wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.
Liczby Halesa-Jewetta $G = \{\mathrm{Id}\}, N = HJ(k, c, d)$.
Liczby Kółka-Krzyżyka $G = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}, N = TTT(k, c, d)$.
$HJ(3, 2, 1) = 4$, $TTT(3, 2, 1) = 3$.

# Twierdzenie Grahama-Rotschilda

## Twierdzenie Graham, Rothschild (1971)

$\forall_{k,m<d,c\in\mathbb{Z}_+}\exists_{N\in\mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania wszystkich $m$-wymiarowych podprzestrzeni $[k]^N$ istnieje $d$-wymiarowa podprzestrzeń, której wszystkie $m$-wymiarowe podprzestrzenie mają ten sam kolor.

# Twierdzenie Grahama-Rotschilda

## Twierdzenie Graham, Rothschild (1971)

$\forall_{k,m<d,c\in\mathbb{Z}_+}\exists_{N\in\mathbb{Z}_+}$, że dla dowolnego $c$ kolorowania wszystkich $m$-wymiarowych podprzestrzeni $[k]^N$ istnieje $d$-wymiarowa podprzestrzeń, której wszystkie $m$-wymiarowe podprzestrzenie mają ten sam kolor.

W szczególności dla $m = 0$ kolorujemy wierzchołki, więc dostajemy Uogólnionego Halesa-Jewetta.

Ustalamy $k = 2, G = S_2, m = 1, d = 2, c = 2,$ ile wynosi $N$?

# Problem Grahama-Rotschilda

Ustalamy $k = 2, G = S_2, m = 1, d = 2, c = 2$, ile wynosi $N$? Bardziej po ludzku:

Znaleźć takie $N$, że jeśli weźmiemy kostkę $N$-wymiarową, uznamy jej wierzchołki za wierzchołki grafu $K_{2^N}$, pokolorujemy jego krawędzie na dwa kolory, to pewna płaszczyzna zawiera monochromatyczne $K_4$.

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

## Liczba Grahama

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$

## Liczba Grahama

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$

$$\vdots$$

$$\text{Graham}(2) \leq g_{64} = 3 \uparrow^{g_{63}} 3;$$

# Liczba Grahama

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$

$$\vdots$$

$$\text{Graham}(2) \leq g_{64} = 3 \uparrow^{g_{63}} 3;$$

Trochę skłamałem w abstrakcie ale nie chciało mi się później poprawiać, to jest szybsze niż funkcja Ackermana o jeden poziom abstrakcji.
$g_i \approx f_{\omega+1}(i) \approx f_\omega^i(i)$.

# Liczba Grahama II

Opublikowane ostatecznie górne oszacowanie jest odrobine lepsze, $F^7(12)$ gdzie $F(m) = 2 \uparrow^m 3$. Nikt tego nie ruszył do 2014.

# Liczba Grahama II

Opublikowane ostatecznie górne oszacowanie jest odrobine lepsze, $F^7(12)$ gdzie $F(m) = 2 \uparrow^m 3$. Nikt tego nie ruszył do 2014.
Najlepsze ograniczenie dolne: $Graham(2) \geq 13$ (2008).

# Wersja prostsza

# Wersja prostsza

Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie: wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.

# Wersja prostsza

Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie: wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.
Komputerowo pokazano, że wystarczy $N = 6$ (wychodzi formuła logiczna o 384 zmiennych, sprawdzalne). Alternatywnie dowód, że $N \leq 2 \uparrow\uparrow 18$ zajmuje stronę A4.

# Wersja prostsza

Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie: wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.
Komputerowo pokazano, że wystarczy $N = 6$ (wychodzi formuła logiczna o 384 zmiennych, sprawdzalne). Alternatywnie dowód, że $N \leq 2 \uparrow\uparrow 18$ zajmuje stronę A4.
Zostaje trochę pola do popisu, byłoby fajnie mieć ładny dowód dla $N < 12$.

# Setup

Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry"i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$

# Setup

Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry"i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$

wówczas każda podprzestrzeń kombinatoryczna albo zawiera się w jednej z części, albo połowę wierzchołków ma w jednej połowę w drugiej (wtedy krawędzie przechodzące między częściami tworzą "hipermuszkę").

# Setup

Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry"i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$

wówczas każda podprzestrzeń kombinatoryczna albo zawiera się w jednej z części, albo połowę wierzchołków ma w jednej połowę w drugiej (wtedy krawędzie przechodzące między częściami tworzą "hipermuszkę"). Przerzucamy sobie krawędzie na punkty w innej przestrzeni

$$f : Q_+ \times Q_- \to [4],$$

$f(1,1) = 1, f(1,2) = 2, f(2,1) = 3, f(2,2) = 4.$ Okazuje się, że dostajemy bijekcję między hipermuszkami a podprzestrzeniami kółko-krzyżyk.

# Ograniczenie górne I

$N = TTT(4,2,d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać $d$-wymiarową czerwoną hipermuszkę.

# Ograniczenie górne I

$N = TTT(4,2,d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać $d$-wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona $d$-wymiarowe podkostki w $Q_+, Q_-$. Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa do znaleźliśmy czerwone $K_4$.

# Ograniczenie górne I

$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać $d$-wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona $d$-wymiarowe podkostki w $Q_+, Q_-$. Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa do znaleźliśmy czerwone $K_4$. Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie.

# Ograniczenie górne I

$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać $d$-wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona $d$-wymiarowe podkostki w $Q_+, Q_-$. Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa do znaleźliśmy czerwone $K_4$. Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie. Bierzemy nową $d$-wymiarową kostkę i kolorujemy, jeśli dany kierunek w dolnej części jest niebieski to kolorujemy na zielono, w przeciwnym wypadku na żółto.

# Ograniczenie górne I

$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać $d$-wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona $d$-wymiarowe podkostki w $Q_+, Q_-$. Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa do znaleźliśmy czerwone $K_4$. Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie. Bierzemy nową $d$-wymiarową kostkę i kolorujemy, jeśli dany kierunek w dolnej części jest niebieski to kolorujemy na zielono, w przeciwnym wypadku na żółto. Ta kostka ma wszystkie równoległe krawędzie na ten sam kolor, jeśli jest zielone $K_4$, to w oryginalnej kostce było niebieskie $K_4$ na dole; jesli jest żółte $K_4$ to było niebieskie $K_4$ na górze.

# Ograniczenie górne II

Mamy $\mathit{Graham}(2) \leq \mathit{TTT}(4, 2, 6) + 1$.

# Ograniczenie górne II

Mamy $Graham(2) \leq TTT(4, 2, 6) + 1$.
Można zrobić oszacowanie $TTT(k, c, d) \leq HJ(k, c, d)$, a potem korzystać z wyników mówiących o $HJ$.

# Ograniczenie górne II

Mamy $Graham(2) \leq TTT(4, 2, 6) + 1$.
Można zrobić oszacowanie $TTT(k, c, d) \leq HJ(k, c, d)$, a potem korzystać z wyników mówiących o $HJ$.
Można też popatrzeć na czym opierają się wyniki dla $HJ$ i powtórzyć to samo dla $TTT$.

# Sztuczka Shelaha

Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.

# Sztuczka Shelaha

Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.
$Cub(k, c, d)$ to jest najmniejsze takie $N$, że dla kazdego $c$-kolorowania $[k]^N$ znajdziemy $d$-wymiarową podprzestrzeń kombinatoryczną, której kolorowanie nie odróżnia zamiany wartości dowolnej współrzędnej między $k$ a $k-1$.

# Sztuczka Shelaha

Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.
$Cub(k, c, d)$ to jest najmniejsze takie $N$, że dla kazdego $c$-kolorowania $[k]^N$ znajdziemy $d$-wymiarową podprzestrzeń kombinatoryczną, której kolorowanie nie odróżnia zamiany wartości dowolnej współrzędnej między $k$ a $k-1$.

$$Cub(k, c, d) \leq d \cdot (c^{k^d} \uparrow\uparrow 2d).$$

Dowód jest trochę techniczny, kolorujemy przestrzeń o $2d-1$ wymiarach na tyle kolorów ile jest $c$-kolorowań $[k]^d$

# Efekt sztuczki

## Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq Cub(k, c, HJ(k-1, c, d));$$

# Efekt sztuczki

## Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq Cub(k, c, HJ(k-1, c, d));$$

$$TTT(k, c, d) \leq Cub(k, c, Cub(k-1, c, TTT(k-2, c, d))).$$

# Efekt sztuczki

## Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq Cub(k, c, HJ(k-1, c, d));$$

$$TTT(k, c, d) \leq Cub(k, c, Cub(k-1, c, TTT(k-2, c, d))).$$

Tempo wzrostu $TTT$ względem pierwszej zmienniej jest co najwyżej takie jak $HJ$, ale zaczyna się od dużo mniejszych wartości.

# Początek rekurencji

Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2d}}$.

# Początek rekurencji

Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c+1) \rceil ; \quad r_i = \left\lceil \log \left( c \cdot \prod_{j<i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil ,$$

# Początek rekurencji

Z tej samej pracy mamy $HJ(2,c,d) < c^{2^{2d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c+1) \rceil\,; \quad r_i = \left\lceil \log\left( c \cdot \prod_{j<i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil,$$

Każdym kolejnym $r_i$ dokładamy dość wymiarów, aby układ poprzednich się powtórzył z zasady szufladkowej Dirichleta.
$TTT(2,c,d) \leq \sum_{j \leq d} r_j < \frac{c}{2} \cdot 3^d$.

# Początek rekurencji

Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c+1) \rceil\,; \quad r_i = \left\lceil \log\left( c \cdot \prod_{j<i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil,$$

Każdym kolejnym $r_i$ dokładamy dość wymiarów, aby układ poprzednich się powtórzył z zasady szufladkowej Dirichleta.
$TTT(2, c, d) \leq \sum_{j \leq d} r_j < \frac{c}{2} \cdot 3^d$. W szczególności jak to się dobrze przeliczy

$$TTT(2, 2, 6) \leq 428.$$

# Koniec rekurencji

# Koniec rekurencji

**Twierdzenie Lavrov, Lee, Mackey (2014)**

$$\mathit{Graham}(2) < \mathit{TTT}(4,2,6) < \mathit{HJ}(4,2,6) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 6 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6.$$

# Koniec rekurencji

**Twierdzenie Lavrov, Lee, Mackey (2014)**

$$Graham(2) < TTT(4,2,6) < HJ(4,2,6) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 6 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6.$$

**Twierdzenie (-) (2019)**

$$Graham(2) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 5138 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 5.$$

# Odnośniki


- W. Gasarch, B. Haeupler; *Lower Bounds on the van der Waerden Numbers: Randomized- and Deterministic-Constructive*; 2010
- W. T. Gowers; *A new proof of Szemeréedi's theorem*; 2001
- R. Graham; *Some of My Favorite Problems in Ramsey Theory*; 2006
- R. Graham, B.Rothschild; *Ramsey's theorem for n-parameter sets*; 1971
- M. Lavrov, M. Lee, J. Mackey; *Improved upper and lower bounds on a geometric Ramsey problem*; 2014
- E. Lipka; *Further improving of upper bound on a geometric Ramsey problem*; 2019
- S. Shelah; *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*; 1988