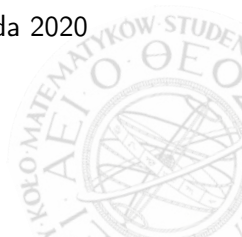


Ograniczenie górne w problemie Grahama-Rothschilda

Eryk Tadeusz Lipka

Koło Matematyków Studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego im. prof. Stanisława Zaremby
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Seminarium Matematyka Dyskretna, 26 listopada 2020



O czym będzie mowa?

Na początku referatu wprowadzimy tematykę Teorii Ramseya oraz klasyczne problemy tej teorii. W drugiej części rozważymy zagadnienie znane jako problem Grahama-Rothschilda. Pierwsze historycznie oszacowania na rozwiązanie tego problemu dają się w sposób zwarty opisać dopiero przy użyciu funkcji typu Ackermana, natomiast my zaprezentujemy najnowsze wyniki które dają ograniczenie przy użyciu zaledwie tetracji.



Teoria Ramseya

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.



Teoria Ramseya

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.

Ograniczenia od dołu są mniej lub bardziej brute-force, a ograniczenia od góry są niekonstruktywne.

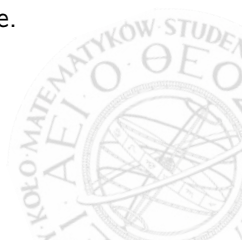


Teoria Ramseya

The mathematical study of combinatorial objects in which a certain degree of order must occur as the scale of the object becomes large. Ramsey theory is named after Frank Plumpton Ramsey, who did seminal work in this area before his untimely death at age 26 in 1930.

Ograniczenia od dołu są mniej lub bardziej brute-force, a ograniczenia od góry są niekonstrukttywne.

Spora wyników nie daje się opisać pierwotnie rekurencyjnie.





Donald Knuth (ten od T_EX'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & \text{dla } b = 0 \\ a^b & \text{dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & \end{cases}$$



Donald Knuth (ten od T_EX'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & \text{dla } b = 0 \\ a^b & \text{dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & \end{cases}$$

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\dots^a}}$$



Donald Knuth (ten od T_EX'a)

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & \text{dla } b = 0 \\ a^b & \text{dla } n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & \end{cases}$$

$$a \uparrow\uparrow b = a^{a^{\dots^a}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\dots a \uparrow\uparrow a) \dots))$$



Twierdzenie Van der Waerdena (1927)

$\forall c, k \in \mathbb{Z}_+ \exists W \in \mathbb{Z}$, że W -elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na c kolorów posiada jednokolorowy k -elementowy podciąg arytmetyczny.



Twierdzenie Van der Waerdena (1927)

$\forall c, k \in \mathbb{Z}_+ \exists W \in \mathbb{Z}$, że W -elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na c kolorów posiada jednokolorowy k -elementowy podciąg arytmetyczny.

$W(2, 3) \geq 9$, bo (r, b, b, r, b, r, r, b)



Twierdzenie Van der Waerdena (1927)

$\forall c, k \in \mathbb{Z}_+ \exists W \in \mathbb{Z}$, że W -elementowy ciąg arytmetyczny pokolorowany na c kolorów posiada jednokolorowy k -elementowy podciąg arytmetyczny.

$W(2, 3) \geq 9$, bo (r, b, b, r, b, r, r, b) , ale udowodnienie że jest równość to babranie się przypadkami.



Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

	2	3	4
3	9	27	76
4	35	293	
5	178		
6	1132		



Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

	2	3	4
3	9	27	76
4	35	293	
5	178		
6	1132		

Szacowanie dolne $\forall \varepsilon > 0 \forall k \gg 0 W(2, k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}$;

$$W(c, k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$$



Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

	2	3	4
3	9	27	76
4	35	293	
5	178		
6	1132		

Szacowanie dolne $\forall \varepsilon > 0 \forall k \gg 0 W(2, k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}$;

$$W(c, k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$$

Szacowanie górne $W(c, k) \leq 2^{2^c 2^{2^{k+9}}}$



Klasyczne przykłady II

Znane wartości:

	2	3	4
3	9	27	76
4	35	293	
5	178		
6	1132		

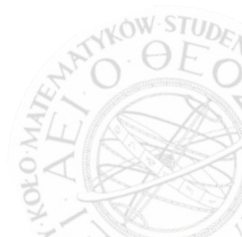
Szacowanie dolne $\forall \varepsilon > 0 \forall k \gg 0 W(2, k) \geq \frac{2^k}{k^\varepsilon}; \quad W(c, k) \geq \frac{c^{k-1}}{ek}$

Szacowanie górne $W(c, k) \leq 2^{2^c 2^{2^{k+9}}}$, Graham oferował 1000\$ za udowodnienie $W(2, k) \leq 2^{k^2}$.



Twierdzenie Ramseya (1930)

Dla dowolnej c -krotki $r_1, \dots, r_c \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie duże N , że dla każdego c -kolorowania K_N mamy dla pewnego i podklikę K_{r_i} koloru i .



Twierdzenie Ramseya (1930)

Dla dowolnej c -krotki $r_1, \dots, r_c \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie duże N , że dla każdego c -kolorowania K_N mamy dla pewnego i podklikę K_{r_i} koloru i .

Znamy 11 nietrywialnych wartości, z czego tylko dwie dla $c > 2$.





Podprzestrzenie kombinatoryczne

Ustalamy $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz $G < S_k$.

Zbiór $\{1, \dots, k\}^N = [k]^N$ nazywamy przestrzenią kombinatoryczną. Jego podzbiór nazywamy **d -wymiarową podprzestrzenią kombinatoryczną**, gdy jest obrazem $[k]^d$ przez bijekcję, która na każdej współrzędnej ma stałą bądź $g(x_i)$ dla pewnego $g \in G, i \in \{1, \dots, d\}$.



Podprzestrzenie kombinatoryczne

Ustalamy $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz $G < S_k$.

Zbiór $\{1, \dots, k\}^N = [k]^N$ nazywamy przestrzenią kombinatoryczną. Jego podzbiór nazywamy **d -wymiarową podprzestrzenią kombinatoryczną**, gdy jest obrazem $[k]^d$ przez bijekcję, która na każdej współrzędnej ma stałą bądź $g(x_i)$ dla pewnego $g \in G, i \in \{1, \dots, d\}$.

Przykładowo $f(x, y, z) = (2, x, x, s(x), y, 3, z, -y)$ dla $d = 3, N = 8, k > 3, G = \langle -\text{Id}, s \rangle$.



Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall k, d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna d -wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.



Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall k, d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna d -wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.

Liczby Halesa-Jewetta $G = \{Id\}$, $N = HJ(k, c, d)$.



Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall k, d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna d -wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.

Liczby Halesa-Jewetta $G = \{\text{Id}\}$, $N = HJ(k, c, d)$.

Liczby Kółka-Krzyżyka $G = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$, $N = TTT(k, c, d)$.



Uogólnione Twierdzenie Halesa-Jewetta (1963)

$\forall k, d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania $[k]^N$ istnieje monochromatyczna d -wymiarowa podprzestrzeń kombinatoryczna.

W podstawowej wersji $d = 1$.

Liczby Halesa-Jewetta $G = \{\text{Id}\}$, $N = HJ(k, c, d)$.

Liczby Kółka-Krzyżyka $G = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$, $N = TTT(k, c, d)$.

$HJ(3, 2, 1) = 4$, $TTT(3, 2, 1) = 3$.



Twierdzenie Graham, Rothschild (1971)

$\forall k, m < d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania wszystkich m -wymiarowych podprzestrzeni $[k]^N$ istnieje d -wymiarowa podprzestrzeń, której wszystkie m -wymiarowe podprzestrzenie mają ten sam kolor.



Twierdzenie Graham, Rothschild (1971)

$\forall k, m < d, c \in \mathbb{Z}_+ \exists N \in \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego c kolorowania wszystkich m -wymiarowych podprzestrzeni $[k]^N$ istnieje d -wymiarowa podprzestrzeń, której wszystkie m -wymiarowe podprzestrzenie mają ten sam kolor.

W szczególności dla $m = 0$ kolorujemy wierzchołki, więc dostajemy Uogólnionego Halesa-Jewetta.



Problem Grahama-Rotschilda

Ustalamy $k = 2$, $G = S_2$, $m = 1$, $d = 2$, $c = 2$, ile wynosi N ?



Problem Grahama-Rotschilda

Ustalamy $k = 2$, $G = S_2$, $m = 1$, $d = 2$, $c = 2$, ile wynosi N ? Bardziej po ludzku:

Znaleźć takie N , że jeśli weźmiemy kostkę N -wymiarową, uznamy jej wierzchołki za wierzchołki grafu K_{2N} , pokolorujemy jego krawędzie na dwa kolory, to pewna płaszczyzna zawiera monochromatyczne K_4 .



$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3;$$



$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$



$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$

\vdots

$$\text{Graham}(2) \leq g_{64} = 3 \uparrow^{g_{63}} 3;$$



$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3;$$

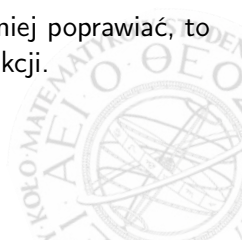
$$g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3;$$

\vdots

$$\text{Graham}(2) \leq g_{64} = 3 \uparrow^{g_{63}} 3;$$

Trochę skłamałem w abstrakcie ale nie chciało mi się później poprawiać, to jest szybsze niż funkcja Ackermana o jeden poziom abstrakcji.

$$g_i \approx f_{\omega+1}(i) \approx f_{\omega}^i(i).$$



Opublikowane ostatecznie górne oszacowanie jest odrobine lepsze, $F^7(12)$ gdzie $F(m) = 2 \uparrow^m 3$. Nikt tego nie ruszył do 2014.



Opublikowane ostatecznie górne oszacowanie jest odrobine lepsze, $F^7(12)$ gdzie $F(m) = 2 \uparrow^m 3$. Nikt tego nie ruszył do 2014.
Najlepsze ograniczenie dolne: $Graham(2) \geq 13$ (2008).





Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie:
wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.



Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie: wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.

Komputerowo pokazano, że wystarczy $N = 6$ (wychodzi formuła logiczna o 384 zmiennych, sprawdzalne). Alternatywnie dowód, że $N \leq 2 \uparrow \uparrow 18$ zajmuje stronę A4.



Rozważmy ten sam problem z dołożonym ograniczeniem na kolorowanie: wszystkie równoległe krawędzie mają ten sam kolor.

Komputerowo pokazano, że wystarczy $N = 6$ (wychodzi formuła logiczna o 384 zmiennych, sprawdzalne). Alternatywnie dowód, że $N \leq 2 \uparrow \uparrow 18$ zajmuje stronę A4.

Zostaje trochę pola do popisu, byłoby fajnie mieć ładny dowód dla $N < 12$.



Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry" i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$



Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry" i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$

wówczas każda podprzestrzeń kombinatoryczna albo zawiera się w jednej z części, albo połowę wierzchołków ma w jednej połowie w drugiej (wtedy krawędzie przechodzące między częściami tworzą "hipermuszkę").



Rozbijamy kostkę na rozłączną sumę "góry" i "dołu"

$$Q = [2]^{N+1} = Q_+ \sqcup Q_-,$$

wówczas każda podprzestrzeń kombinatoryczna albo zawiera się w jednej z części, albo połowę wierzchołków ma w jednej połowę w drugiej (wtedy krawędzie przechodzące między częściami tworzą "hipermuszkę").

Przerzucamy sobie krawędzie na punkty w innej przestrzeni

$$f : Q_+ \times Q_- \rightarrow [4],$$

$f(1, 1) = 1, f(1, 2) = 2, f(2, 1) = 3, f(2, 2) = 4$. Okazuje się, że dostajemy bijekcję między hipermuszkami a podprzestrzeniami kółko-krzyżyk.

Ograniczenie górne I

$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać d -wymiarową czerwoną hipermuszkę.



Ograniczenie górne I

$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać d -wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona d -wymiarowe podkostki w Q_+ , Q_- . Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa to znaleźliśmy czerwone K_4 .



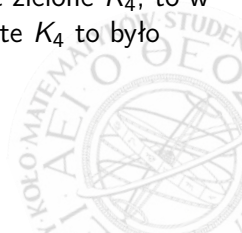
$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać d -wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona d -wymiarowe podkostki w Q_+ , Q_- . Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa to znaleźliśmy czerwone K_4 . Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie.



$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać d -wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona d -wymiarowe podkostki w Q_+ , Q_- . Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa to znaleźliśmy czerwone K_4 . Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie. Bierzemy nową d -wymiarową kostkę i kolorujemy, jeśli dany kierunek w dolnej części jest niebieski to kolorujemy na zielono, w przeciwnym wypadku na żółto.



$N = TTT(4, 2, d) + 1$ jest skończone. Z definicji tej liczby i bijekcji wiemy, że możemy wybrać d -wymiarową czerwoną hipermuszkę. Zadaje nam ona d -wymiarowe podkostki w Q_+ , Q_- . Jeśli w górnej części jest jakaś czerwona krawędź, a w dolnej jest czerwona krawędź do niej równoległa to znaleźliśmy czerwone K_4 . Więc dla każdego możliwego kierunku wszystkie krawędzie na górze lub na dole są niebieskie. Bierzemy nową d -wymiarową kostkę i kolorujemy, jeśli dany kierunek w dolnej części jest niebieski to kolorujemy na zielono, w przeciwnym wypadku na żółto. Ta kostka ma wszystkie równoległe krawędzie na ten sam kolor, jeśli jest zielone K_4 , to w oryginalnej kostce było niebieskie K_4 na dole; jeśli jest żółte K_4 to było niebieskie K_4 na górze.



Mamy $Graham(2) \leq TTT(4, 2, 6) + 1$.



Mamy $Graham(2) \leq TTT(4, 2, 6) + 1$.

Można zrobić oszacowanie $TTT(k, c, d) \leq HJ(k, c, d)$, a potem korzystać z wyników mówiących o HJ .



Mamy $Graham(2) \leq TTT(4, 2, 6) + 1$.

Można zrobić oszacowanie $TTT(k, c, d) \leq HJ(k, c, d)$, a potem korzystać z wyników mówiących o HJ .

Można też popatrzeć na czym opierają się wyniki dla HJ i powtórzyć to samo dla TTT .



Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.



Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.

$Cub(k, c, d)$ to jest najmniejsze takie N , że dla każdego c -kolorowania $[k]^N$ znajdziemy d -wymiarową podprzestrzeń kombinatoryczną, której kolorowanie nie odróżnia zamiany wartości dowolnej współrzędnej między k a $k - 1$.

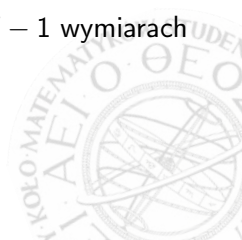


Cały trik polega na tym, że potrafimy zrobić rekurencyjne ograniczenie względem pierwszej zmiennej czyli rozmiaru zbioru.

$Cub(k, c, d)$ to jest najmniejsze takie N , że dla każdego c -kolorowania $[k]^N$ znajdziemy d -wymiarową podprzestrzeń kombinatoryczną, której kolorowanie nie odróżnia zamiany wartości dowolnej współrzędnej między k a $k - 1$.

$$Cub(k, c, d) \leq d \cdot (c^{k^d} \uparrow\uparrow 2d).$$

Dowód jest trochę techniczny, kolorujemy przestrzeń o $2d - 1$ wymiarach na tyle kolorów ile jest c -kolorowań $[k]^d$



Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq Cub(k, c, HJ(k - 1, c, d));$$



Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq \text{Cub}(k, c, HJ(k - 1, c, d));$$

$$TTT(k, c, d) \leq \text{Cub}(k, c, \text{Cub}(k - 1, c, TTT(k - 2, c, d))).$$



Lemat Shelah (1988)

$$HJ(k, c, d) \leq \text{Cub}(k, c, HJ(k - 1, c, d));$$

$$TTT(k, c, d) \leq \text{Cub}(k, c, \text{Cub}(k - 1, c, TTT(k - 2, c, d))).$$

Tempo wzrostu TTT względem pierwszej zmiennej jest co najwyżej takie jak HJ , ale zaczyna się od dużo mniejszych wartości.



Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2d}}$.



Początek rekurencji

Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2^d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c + 1) \rceil; \quad r_i = \left\lceil \log \left(c \cdot \prod_{j < i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil,$$



Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2^d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c + 1) \rceil; \quad r_i = \left\lceil \log \left(c \cdot \prod_{j < i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil,$$

Każdym kolejnym r_i dokładamy dość wymiarów, aby układ poprzednich się powtórzył z zasady szufladkowej Dirichleta.

$$TTT(2, c, d) \leq \sum_{j \leq d} r_j < \frac{c}{2} \cdot 3^d.$$



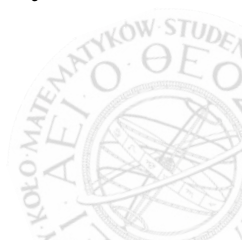
Z tej samej pracy mamy $HJ(2, c, d) < c^{2^{2^d}}$.

$$r_1 = \lceil \log(c + 1) \rceil; \quad r_i = \left\lceil \log \left(c \cdot \prod_{j < i} \binom{2^{r_j}}{2} + 1 \right) \right\rceil,$$

Każdym kolejnym r_i dokładamy dość wymiarów, aby układ poprzednich się powtórzył z zasady szufladkowej Dirichleta.

$TTT(2, c, d) \leq \sum_{j \leq d} r_j < \frac{c}{2} \cdot 3^d$. W szczególności jak to się dobrze przeliczy

$$TTT(2, 2, 6) \leq 428.$$





Twierdzenie Lavrov, Lee, Mackey (2014)

$$\text{Graham}(2) < TTT(4, 2, 6) < HJ(4, 2, 6) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 6 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6.$$

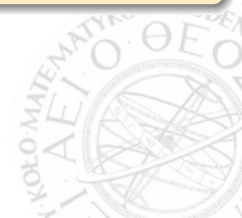


Twierdzenie Lavrov, Lee, Mackey (2014)

$$\text{Graham}(2) < TTT(4, 2, 6) < HJ(4, 2, 6) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 6 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 6.$$

Twierdzenie (-) (2019)

$$\text{Graham}(2) < 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 5138 < 2 \uparrow\uparrow\uparrow 5.$$



- ▶ W. Gasarch, B. Haeupler; *Lower Bounds on the van der Waerden Numbers: Randomized- and Deterministic-Constructive*; 2010
- ▶ W. T. Gowers; *A new proof of Szemerédi's theorem*; 2001
- ▶ R. Graham; *Some of My Favorite Problems in Ramsey Theory*; 2006
- ▶ R. Graham, B. Rothschild; *Ramsey's theorem for n -parameter sets*; 1971
- ▶ M. Lavrov, M. Lee, J. Mackey; *Improved upper and lower bounds on a geometric Ramsey problem*; 2014
- ▶ E. Lipka; *Further improving of upper bound on a geometric Ramsey problem*; 2019
- ▶ S. Shelah; *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*; 1988

