Seminarium - Matematyka Dyskretna 18/03

Rikudo is NP-complete

Mikołaj Kondratek

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

18 Marca 2021

Viet-Ha Nguyena[a] and Kevin Perrota[a,b]

[a]Univ. Cote d'Azur, CNRS, Inria, I3S, Sophia Antipolis, France
[b]Aix-Marseille Univ., Univ. de Toulon, CNRS, LIS, Marseille, France

Plan

1. Wprowadzenie
2. HCH
3. Rikudo jest NP-trudne, nawet gdy $p = \emptyset$ i $\mathrm{dom}(m) = \{1, n\}$
4. Rikudo bez dziur jest NP-trudne
5. 1-nad-2-Rikudo jest w P
6. 1-nad-3-Rikudo jest w NP

Definicje

Orientacja sześciokąta (hexagonu)

- Spiczasta orientacja (pointy orientation)
- Płaska orientacja (flat orientation)

Rozważmy siatkę heksagonalną z orientacją spiczastą, przez $\mathcal{C}$ oznaczamy zbiór komórek. Dla danego podzbioru $\tau \subset \mathcal{C}$ podwiązujemy graf G_τ (bez pętli) na zbiorze wierzchołków τ z relacją sąsiedztwa $\hexagon$ odpowiadającą parom komórek dzielących krawędź. Mówimy, że τ jest *spójny*, jeśli G_τ jest spójny.

Definicje

Rikudo

Rikudo jest spójnym skończonym podzbiorem τ z

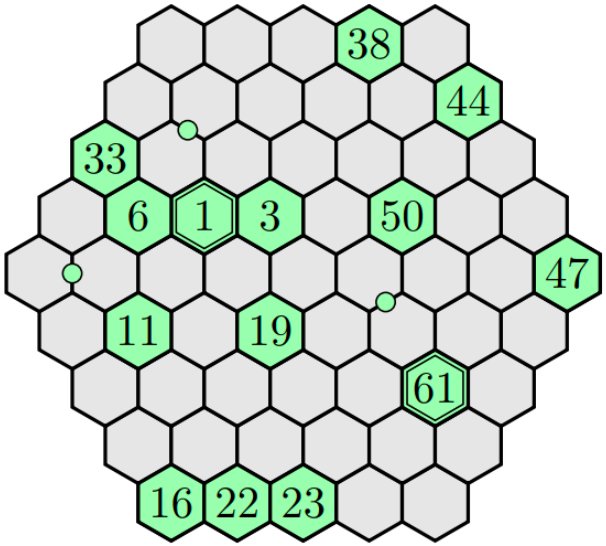
- $n = |\tau|$ i $[n] = 1, \ldots, n$
- częściową iniekcją $m : \tau \to [n]$ (dane liczby)
- podzbiorem relacji sąsiedztwa $p \subseteq \hexagon$ (dane krawędzie)

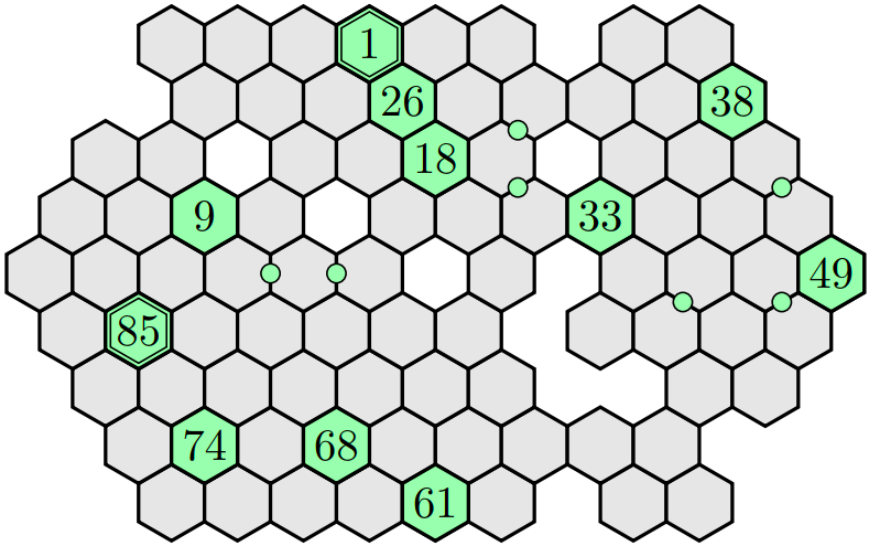
Rozwiązanie Rikudo

Rozwiązaniem jest bijekcją $s : \tau \to [n]$ taką, że z symetryczną binarna relacją $\leftrightsquigarrow_s$ na $\mathcal{C}$ zdefiniowaną jako $c \leftrightsquigarrow_s c' \iff |s(c) - s(c')| = 1$,

- $\leftrightsquigarrow_s \subseteq \hexagon$ (sekwencja liczb tworząca ścieżkę Hamiltona w G_τ)
- $\forall_{c \in \mathrm{dom}(m)} s(c) = m(c)$ (uwzględnienie danych liczb)
- $p \subseteq \leftrightsquigarrow_s$ (uwzględnienie danych krawędzi)

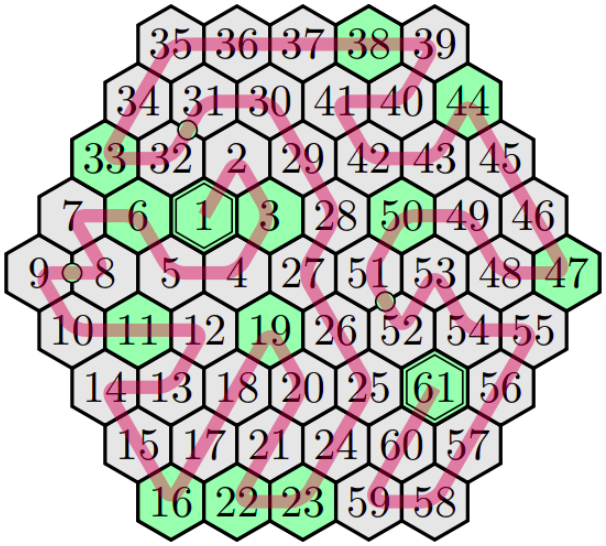
Przykładowe Rikudo

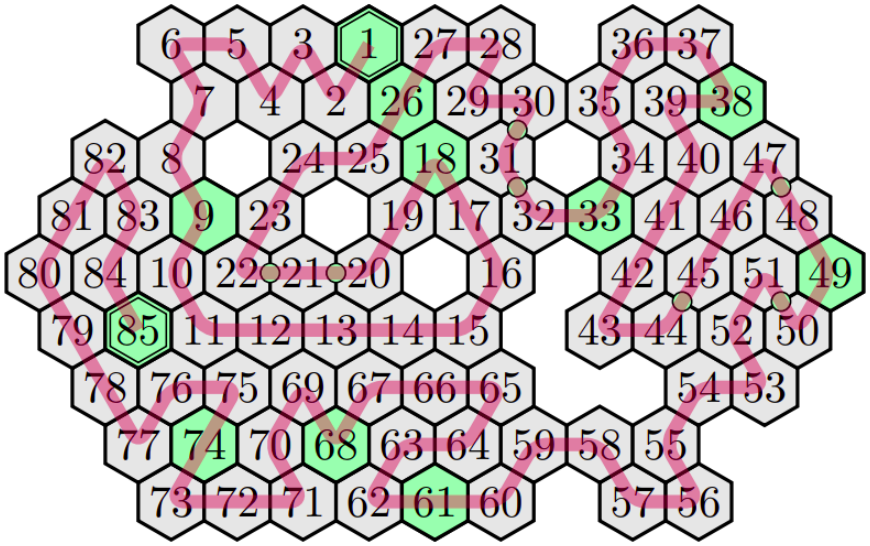




Dwie przykładowe gry. Gracz ma za zadanie dokończyć tworzone przez liczby ścieżki Hamiltona ($\leftrightsquigarrow_s$) na podzbiorze komórek τ (od 1 do $n = 61$ na pierwszym obrazku, od 1 do $n = 85$ na drugim), mając dane niektóre z liczb, postępując za krawędziową relacją sąsiedztwa ($\hexagon$) i uwzględniając te wskazane przy pomocy kółka (p).

Przykładowe Rikudo - rozwiązania





Problem

Rikudo

Dane: gra (τ, m, p).
Pytanie: czy istnieje rozwiązanie?

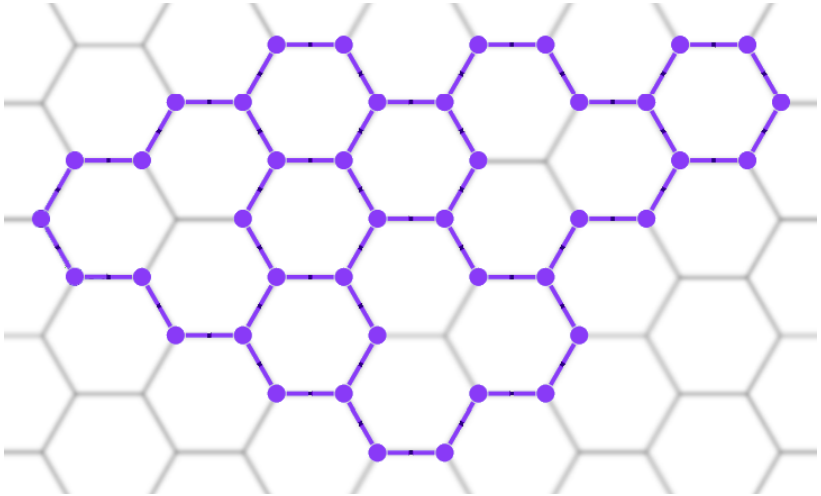
Rikudo bez dziur (without holes)

Dane: gra (τ, m, p) takie, że G_τ jest spójny.
Pytanie: czy istnieje rozwiązanie?

Obydwa problemy są trywialnie w NP.

HCH

Hamiltonian circuits in hexagonal grid graphs



Hamilton Circuits in Hexagonal Grid Graphs
K. Islam, H. Meijer, Y. Nunez, D. Rappaport, and H. Xiao

Dowód

"Analogicznie" jak w tej pracy wychodząc od HCB (Hamiltonian Circuts in Planar Bipartite Graphs)...

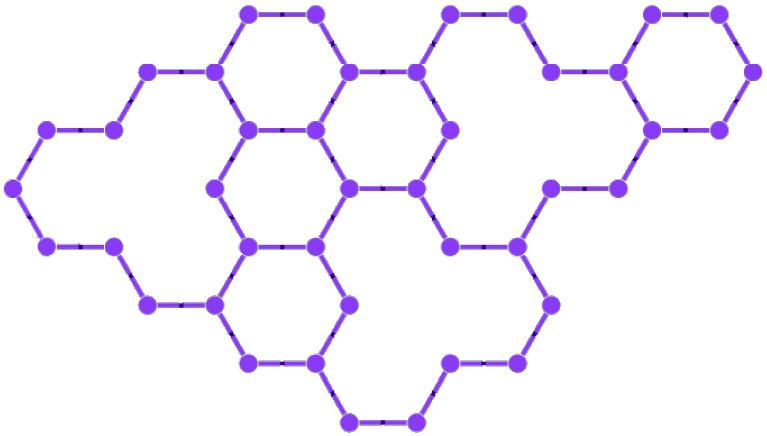
Twierdzenie 1

Theorem

Rikudo jest NP-trudne, nawet gdy $p = \emptyset$ *i* $dom(m) = \{1, n\}$.

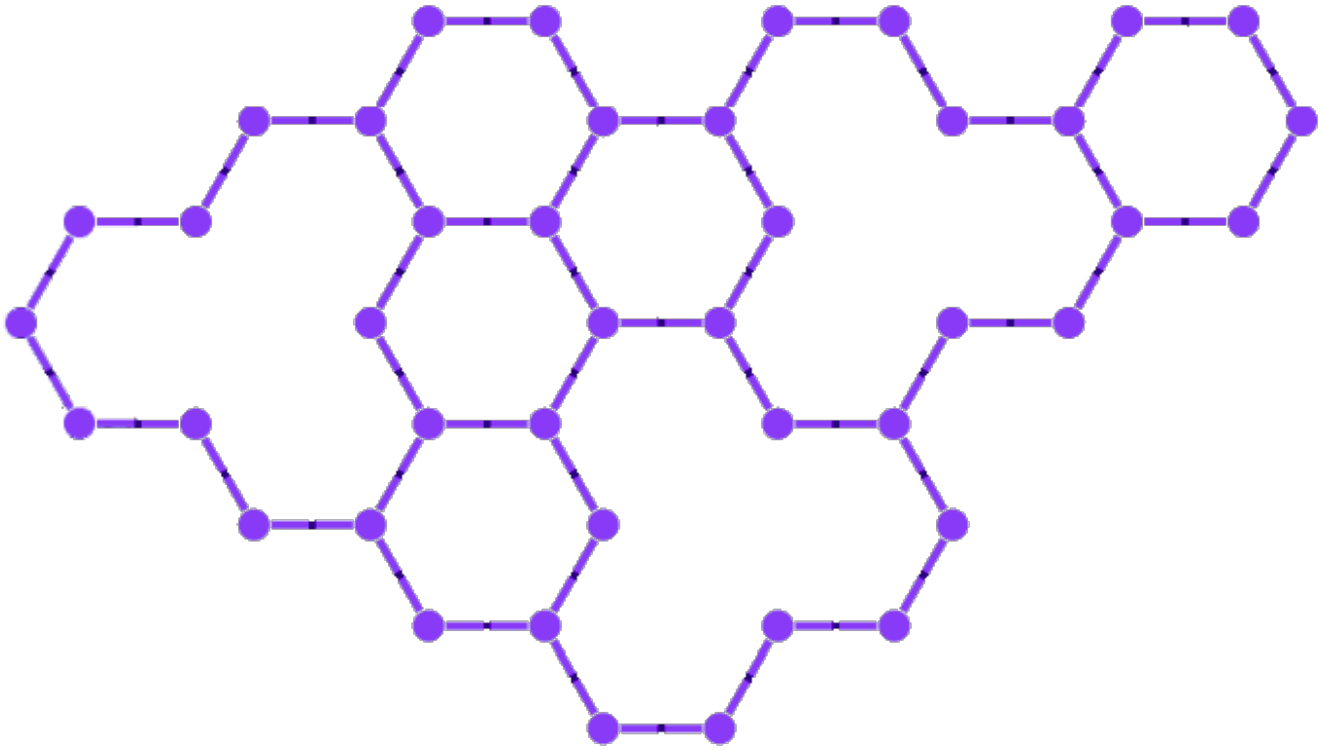
Twierdzenie 1

Dowód



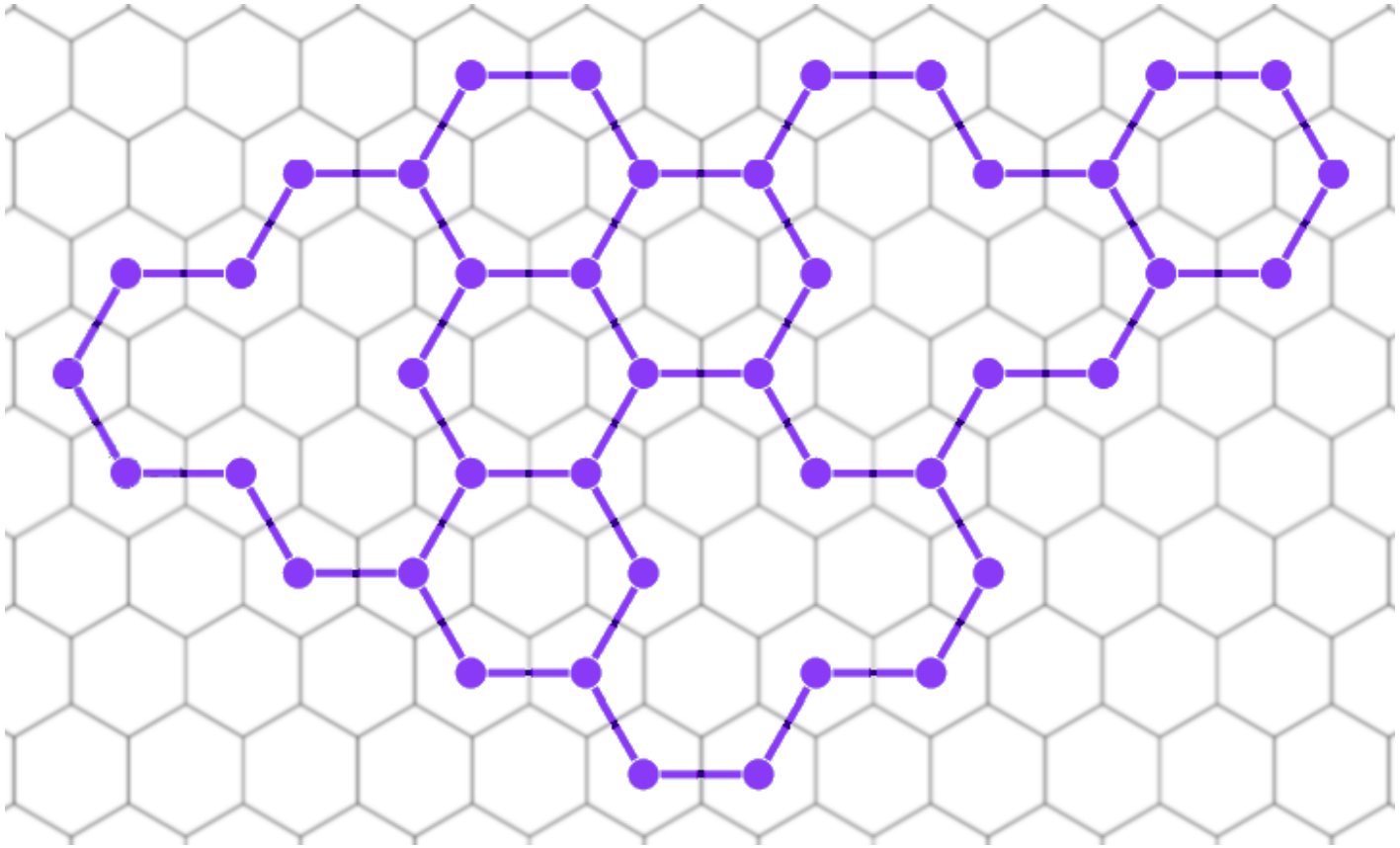
Twierdzenie 1

Dowód



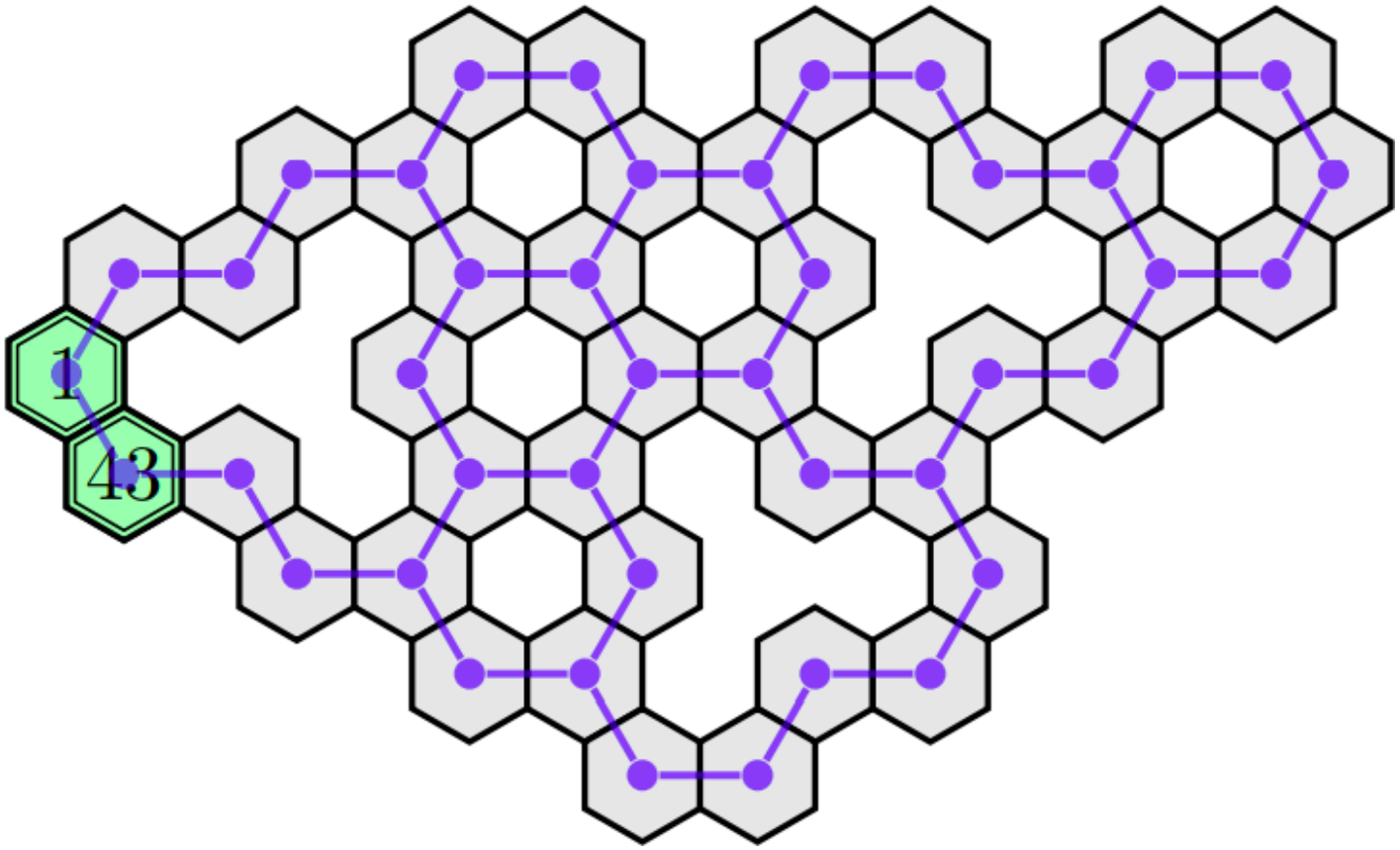
Twierdzenie 1

Dowód



Twierdzenie 1

Dowód



Twierdzenie 1

Dowód formalny

Weźmy H - graf na krawędziach heksagonalnej siatki. Zauważmy, że wierzchołki H odpowiadają narożnikom (corner) heksagonów, podczas gdy wierzchołki G_τ odpowiadają samym komórkom (heksagonom). Niech H będzie w orientacji płaskiej. Przeskalujmy H razy $\sqrt{3}$ i wyrównajmy do środków komórek siatki w orientacji spiczastej.

Twierdzenie 1

Dowód formalny, cd

Dalej, redukcja sprowadza sie do gry (τ, m, p), gdzie τ to zbiór wierzchołków zawierających (hosting) wierzchołki H, $p = \emptyset$, a m zdefiniowane jedynie dla dwóch $t, t^{'} \in \tau$ takich, że $t \hexagon t^{'}$ i t jest stopnia 2 w G_τ (zawsze taki istnieje), jako $m(t) = 1$ i $m(t^{'}) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków w H.

Mamy zatem $H = G_\tau$, a tak zdefiniowane m sprawia, że ścieżka Hamiltona z Rikudo jest cyklem Hamiltona (w H). Instancje **HCH** i **Rikudo** są identyczne. ■

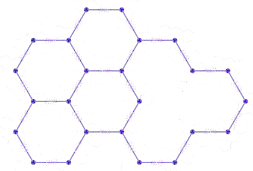
Twierdzenie 2

Theorem

Rikudo bez dziur jest NP-trudne.

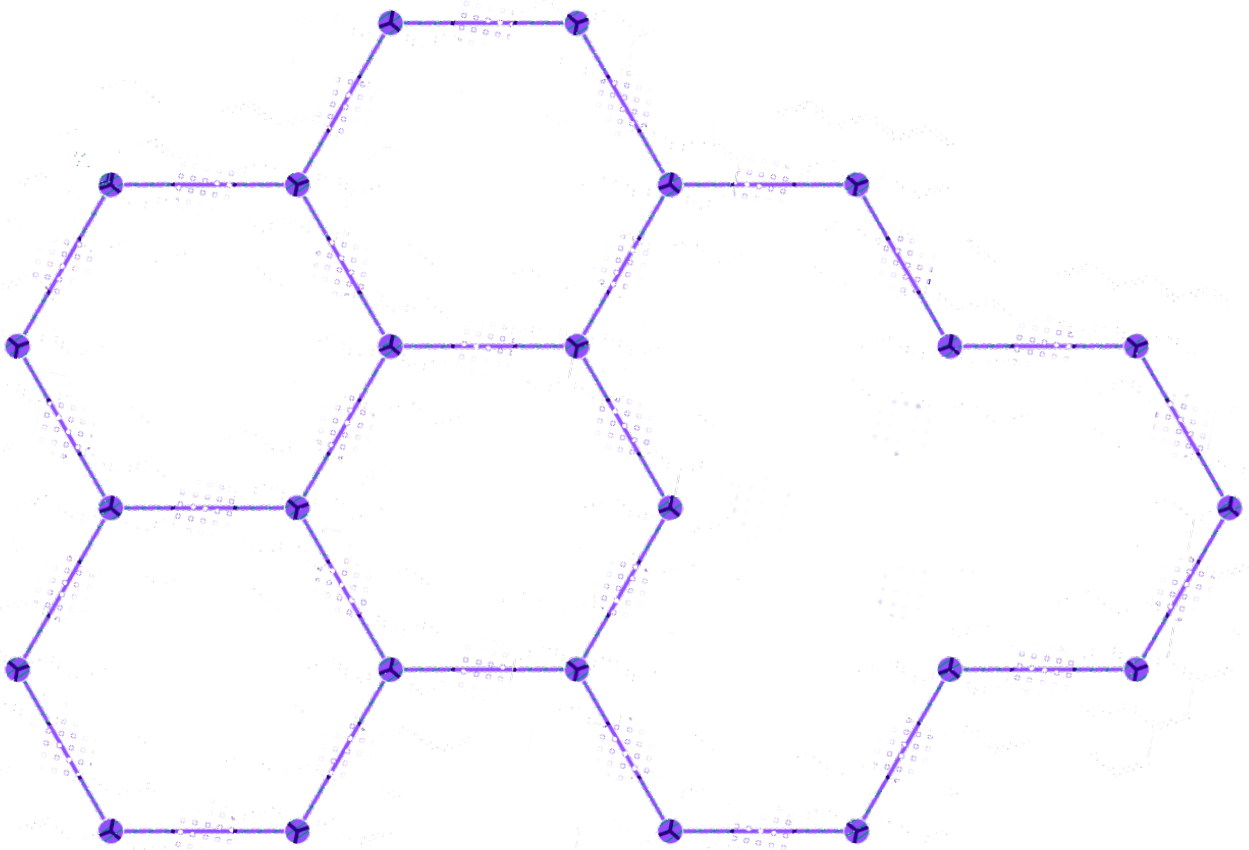
Twierdzenie 2

Dowód



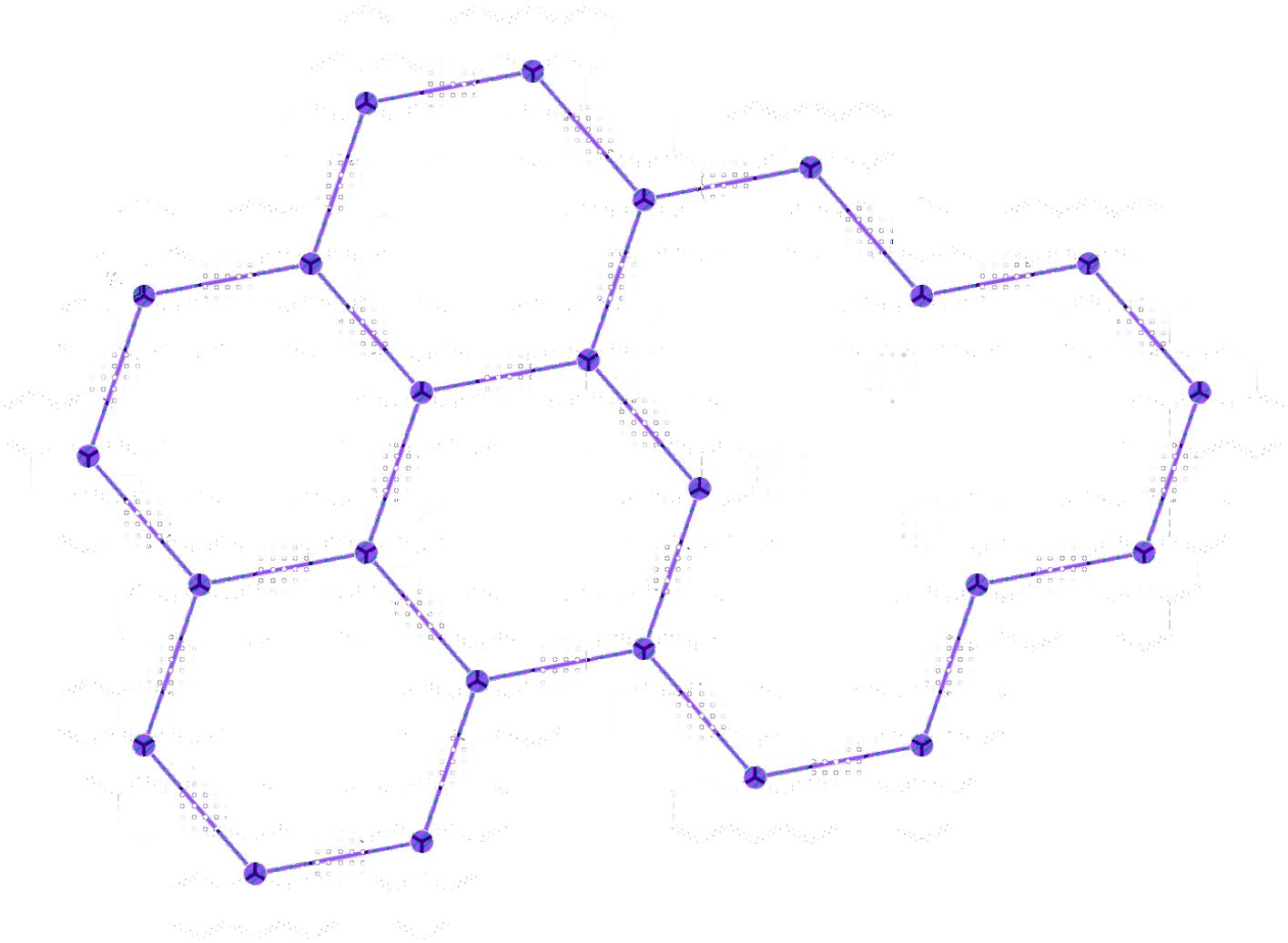
Twierdzenie 2

Dowód



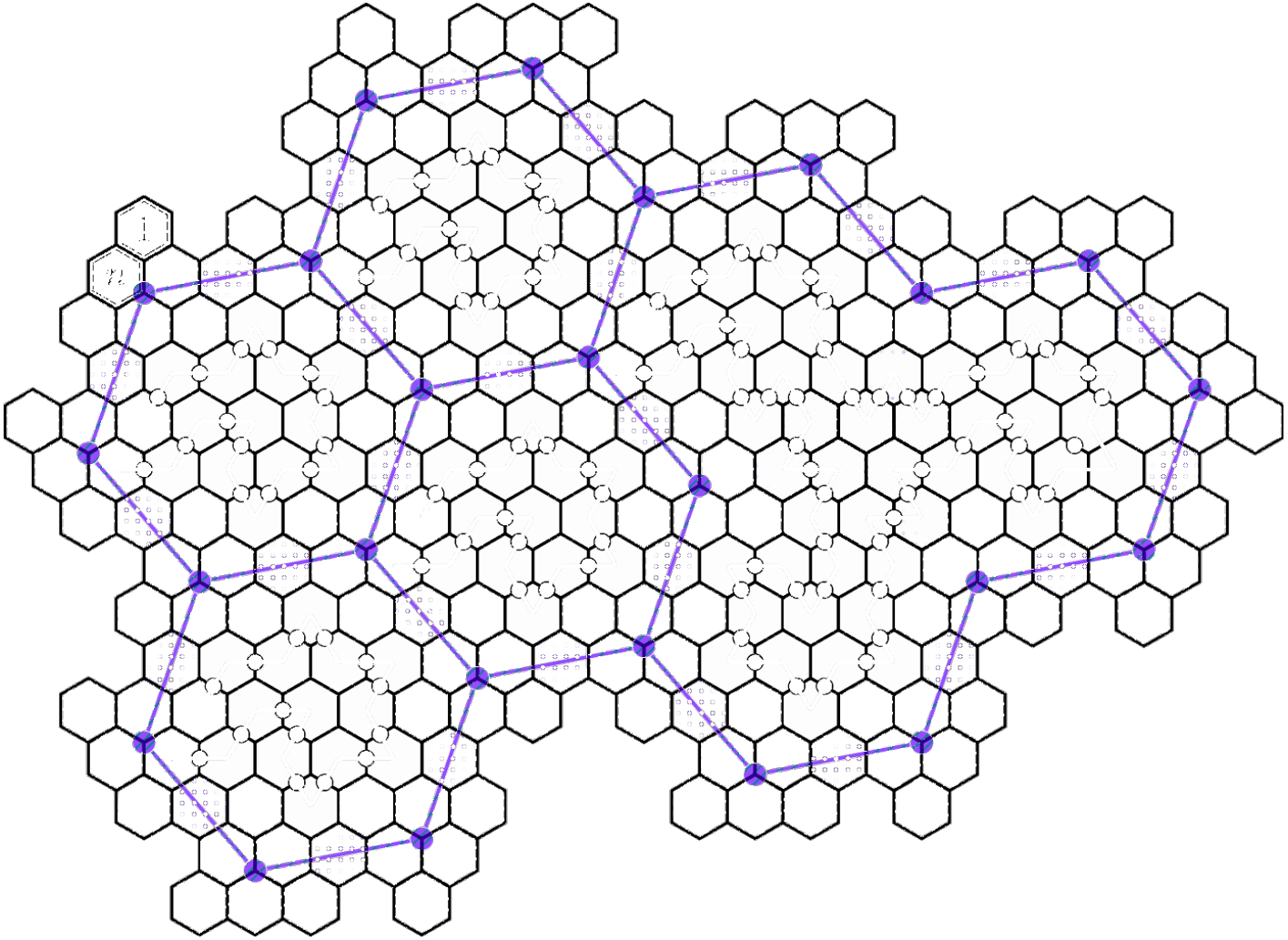
Twierdzenie 2

Dowód



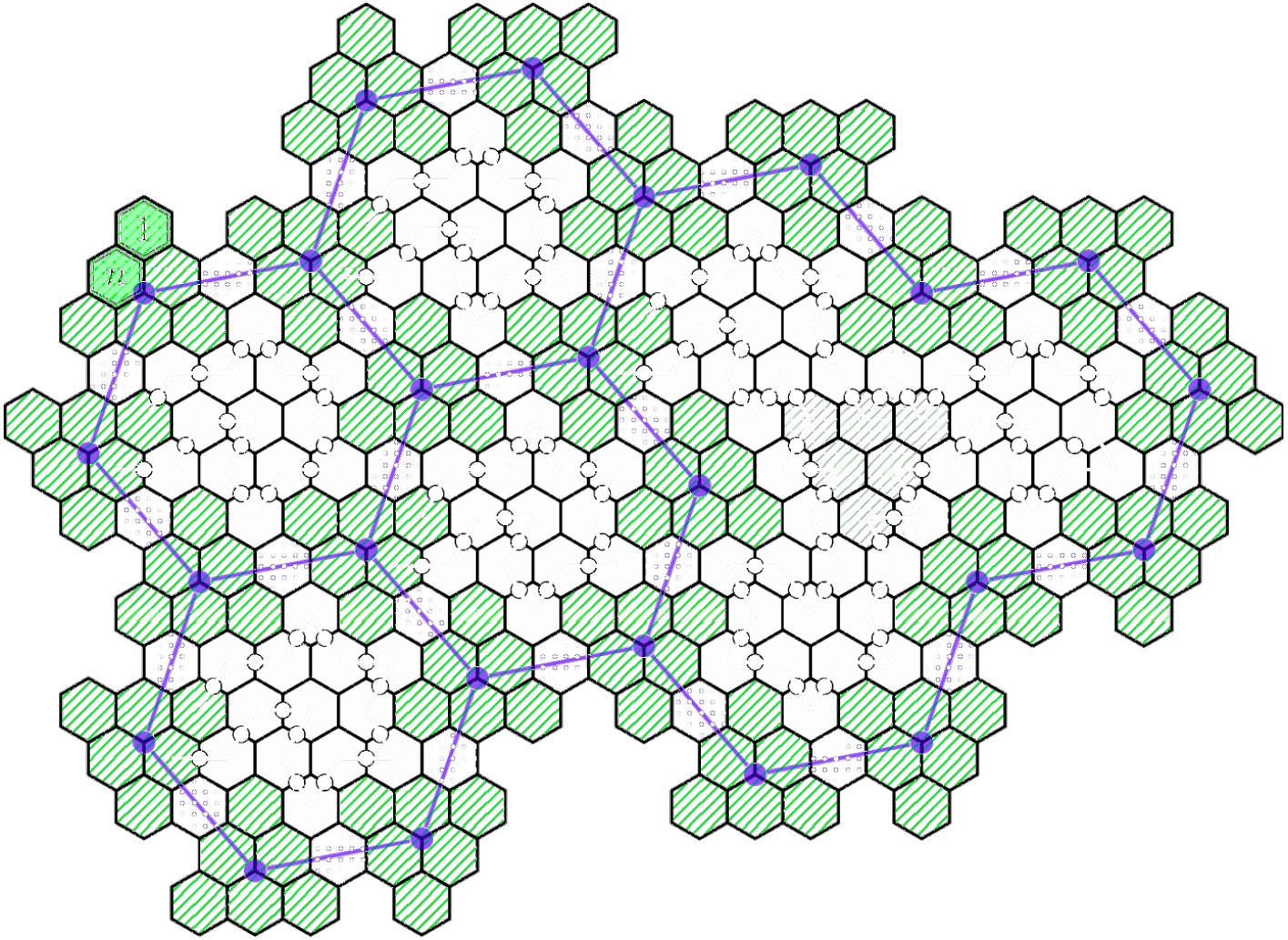
Twierdzenie 2

Dowód



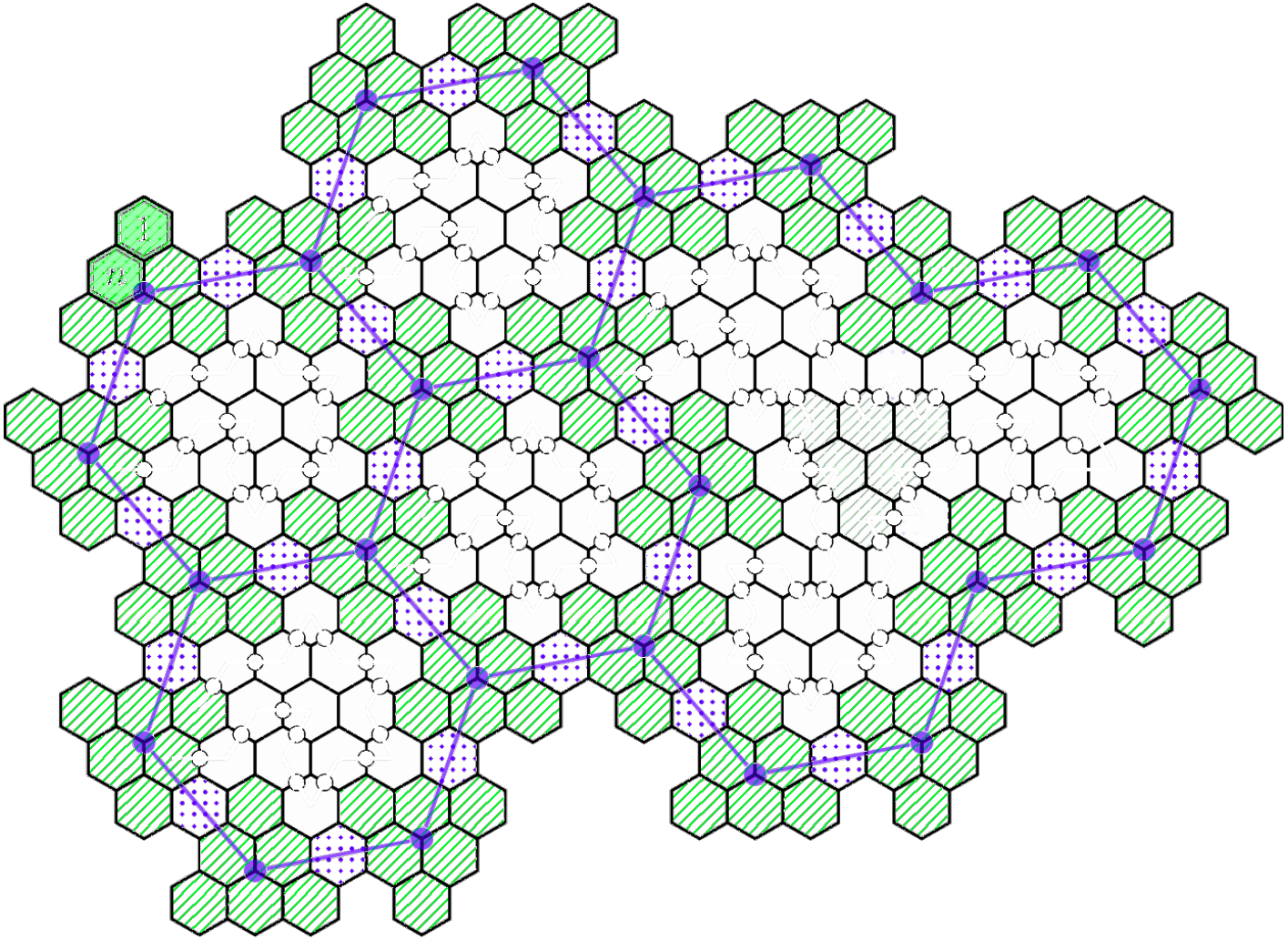
Twierdzenie 2

Dowód



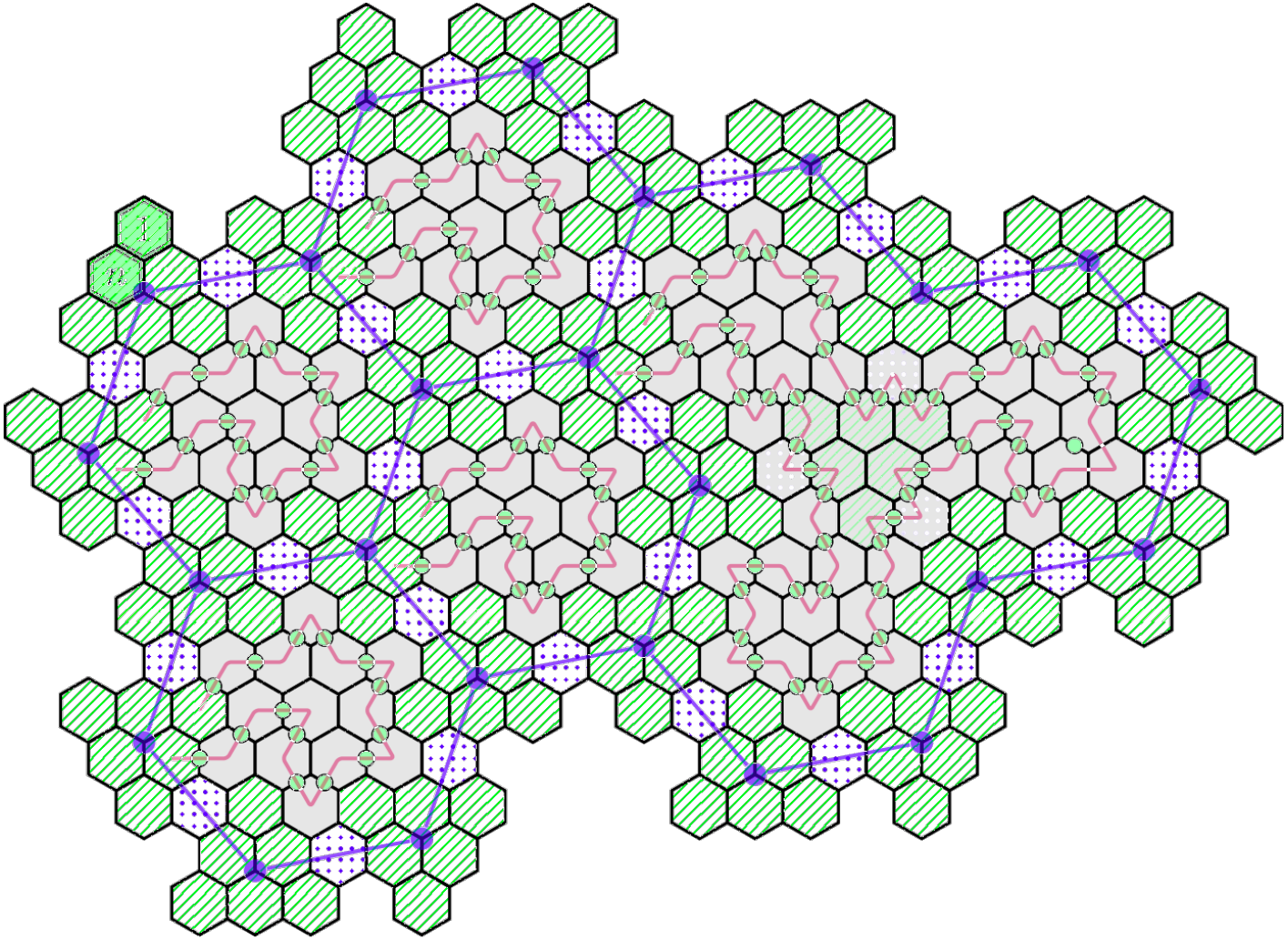
Twierdzenie 2

Dowód



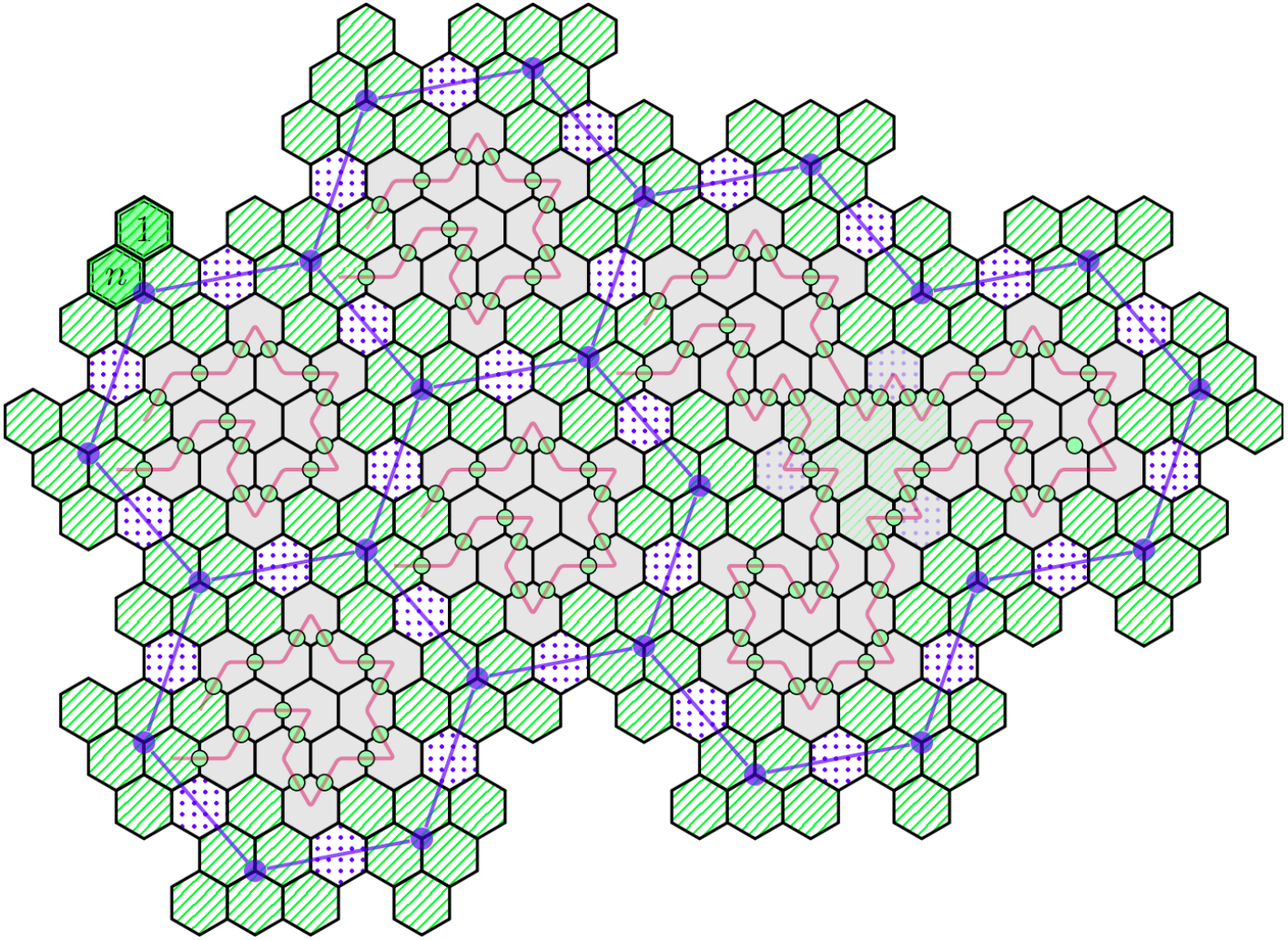
Twierdzenie 2

Dowód



Twierdzenie 2

Dowód



Twierdzenie 2

Dowód formalny - Dopasowanie grafów

Weźmy H instancję HCH. Bez straty ogólności rozważamy tylko wierzchołki stopnia 2 lub 3. Konstrukcja gry (τ, m, p) (powiększ razy $2\sqrt{7}$, obróć o $arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$, wyrównaj do siatki)...

Twierdzenie 2

Dowód formalny - Grupy wierzchołków

Każdy $v \in H$ to narożnik 3 komórek $c_1(v)$, $c_2(v)$, $c_3(v)$. Środek każdej krawędzi leży w komórce $c(e)$. Niech $c_4(v)$ (odpowiednio $c_5(v)$, $c_6(v)$) będzie komórką sąsiednią dla c_1 i c_2 (odpowiednio $c_2(v)$, $c_3(v)$ oraz $c_3(v)$, $c_1(v)$), która nie jest $c_3(v)$ (odpowiednio $c_1(v)$, $c_2(v)$).

Dla każdego $v \in H$ $c_i(v)$ tworzą trójkąt zwrócony w dół lub górę ($i \in [1, 6]$).

Rozważamy podzbiór komórek $\tau^{'}$ pozyskany w następujący sposób:

- $\forall v \in V(H)$ dodaj $c_i(v)$ do $\tau^{'}$ - **vertex gadget**
- $\forall e \in E(H)$ dodaj $c(e)$ do $\tau^{'}$ - **edge gadget**

Twierdzenie 2

Dowód formalny - Definicje

Komponenty

- v-komponent - vertex gadget
- e-komponent - edge gadget
- h-komponent - pozostałe 13 wierzchołków

Dziurą w τ' nazywamy wierzchołki skończonych spójnych składowych $G_{\mathcal{C}\setminus\tau'}$.

Dla dowolnego wierzchołka $v \in V(H)$ i powiązanego gadget'u **dostępem (access)** nazywamy każdą parę $(c_1(v), c_6(v))$, $(c_2(v), c_4(v))$, $(c_3(v), c_5(v))$.

Twierdzenie 2

Dowód formalny - Wypełnienie dziur

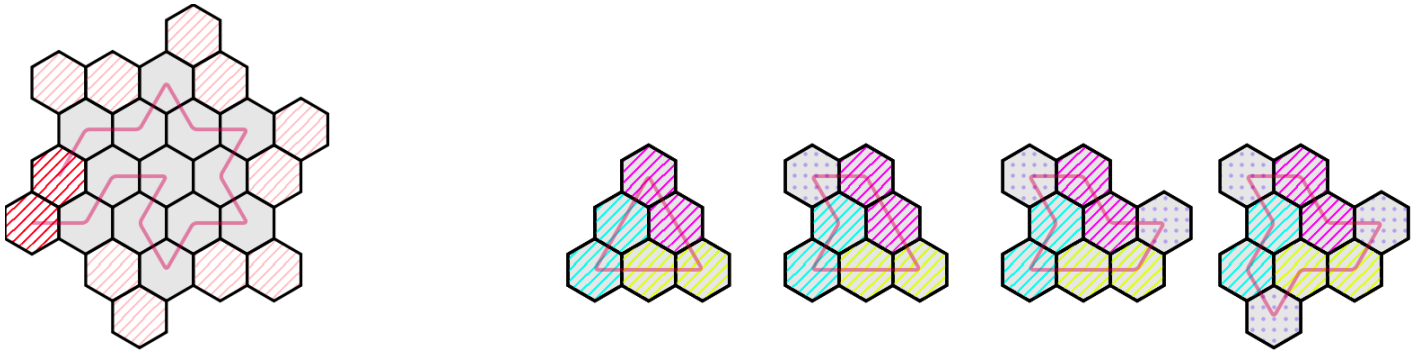
Mając dziurę τ'' z τ' definiujemy $H_{\tau''}$, którego wierzchołkami są v- i h-komponenty należące do $G_{\tau''}$. Takie dwa komponenty są sąsiadujące jeśli jakieś ich komórki sąsiadują ($H_{\tau''}$ jest dwudzielny, bo nie uwzględniamy e-komponentów).

Biorąc naszą τ'' i sąsiadujący dostęp α, niech $T^{\alpha}_{\tau''}$ będzie ukorzenionym drzewem rozpinającym $H_{\tau''}$, którego korzeniem jest v-komponent sąsiadujący z dostępem α.

Dla wierzchołka $t \in V(H_{\tau''}))$ stanowiącego h-komponent, niech $\tau''[t]$ będzie podzbiorem τ'' odpowiadającym poddrzewu $T^{\alpha}_{\tau''}$ ukorzenionemu w t.

Twierdzenie 2

Dowód formalny - Ścieżki bazowe



Twierdzenie 2

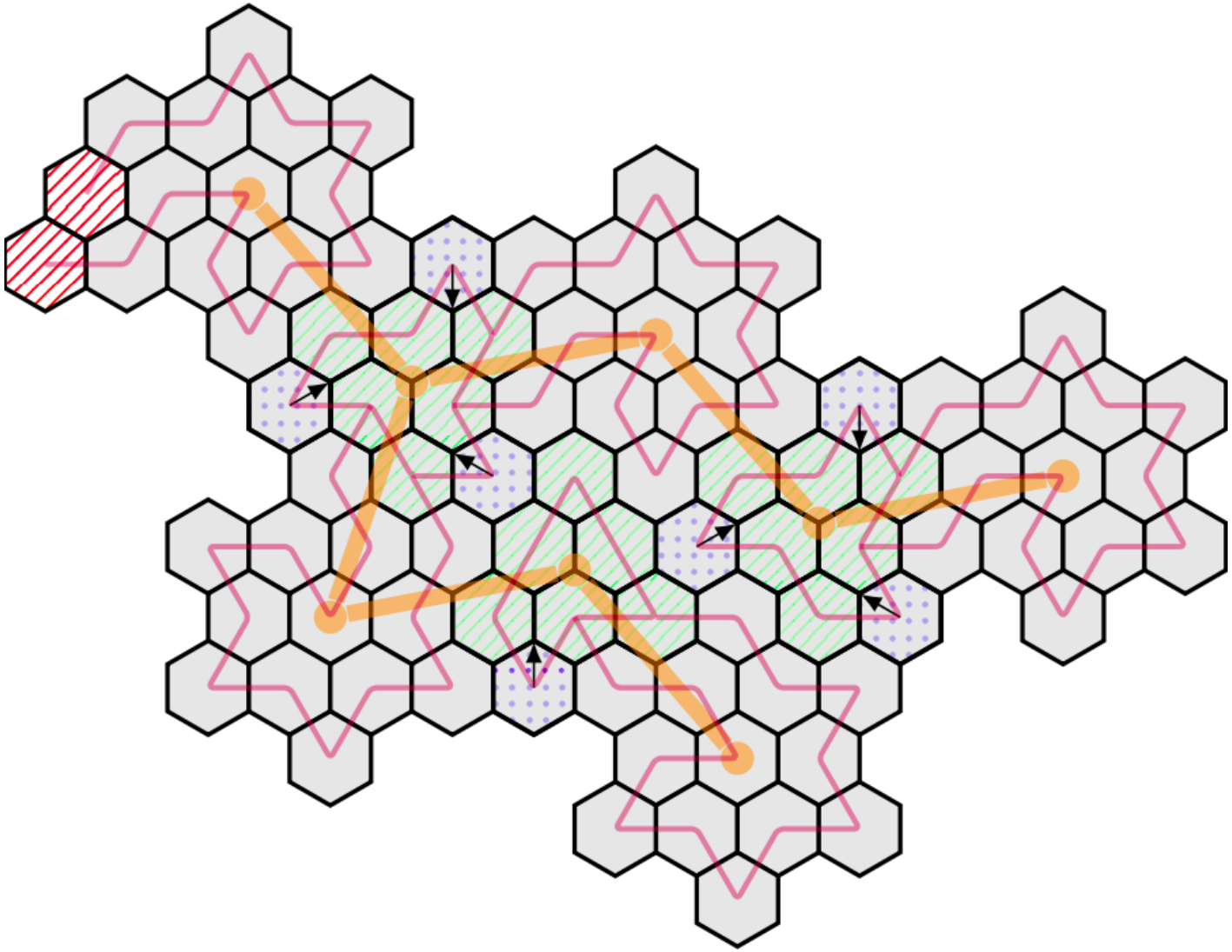
Dowód formalny - Wypełnienie dziur, cd

Zaczynając od jednej z komórek dostępu α budujemy rekurencyjnie ścieżkę Hamiltona $P^{\alpha}_{\tau''}$:

- dla korzenia r drzewa $T^{\alpha}_{\tau''}$, który jest h-komponentem zbuduj ścieżkę bazową (h-basepath)
- dla każdego dziecka s należącego do r, który jest v-komponentem zbuduj ścieżkę bazową (v-basepath) razem z powiązanymi "komórkami krawędzi" e takimi, że $(v)(e) = s$
- dla każdego dziecka t należącego do s weźmy dostęp β należący do s, który sąsiaduje z t i rekurencyjnie zbuduj $P^{\beta}_{\tau''[t]}$ wzdłuż $T^{\beta}_{\tau''[t]}$
- połącz kawałki ścieżki razem w dostępach przy pomocy **zamian** (flips)

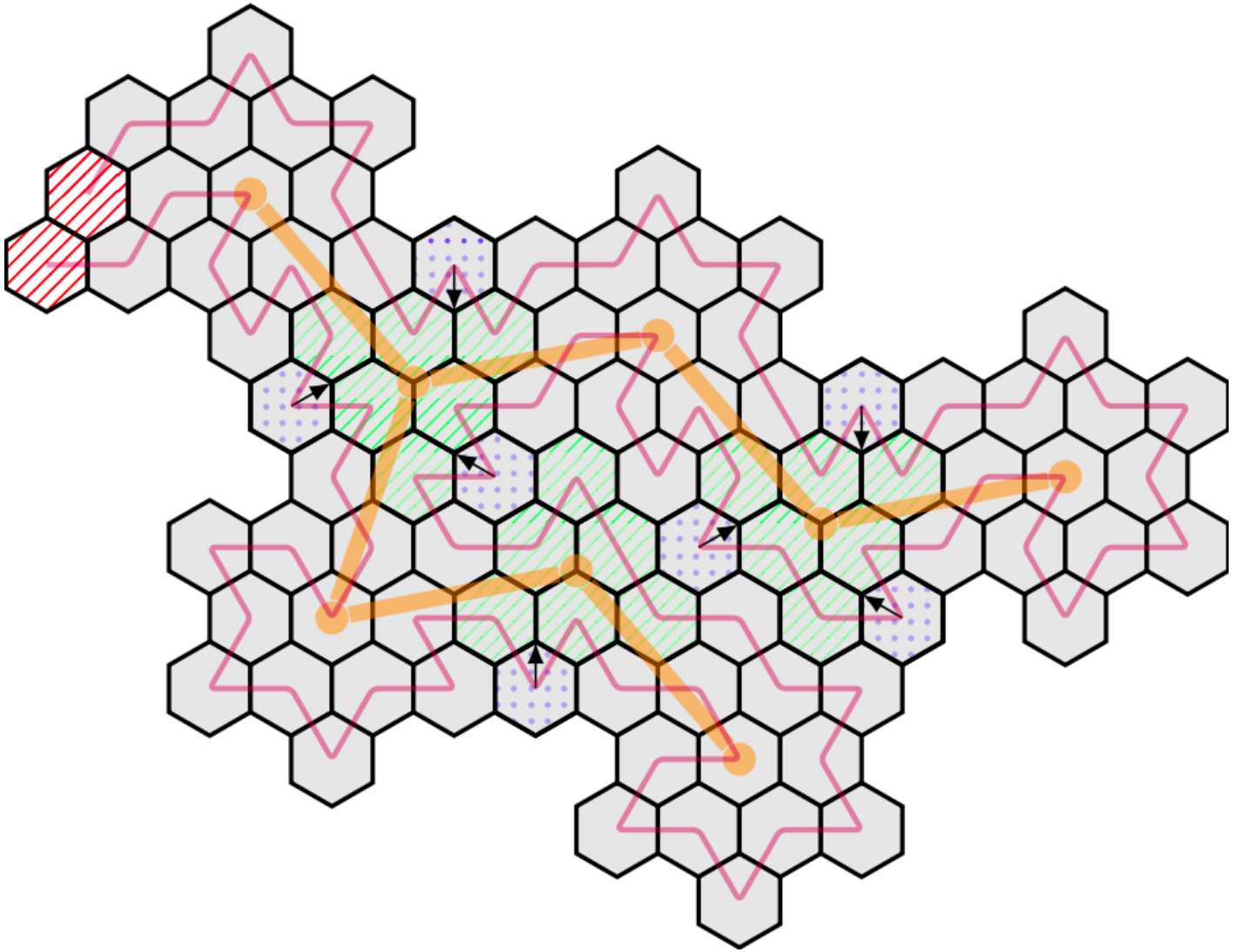
Twierdzenie 2

Dowód formalny - Wypełnianie dziur - Wizualizacja



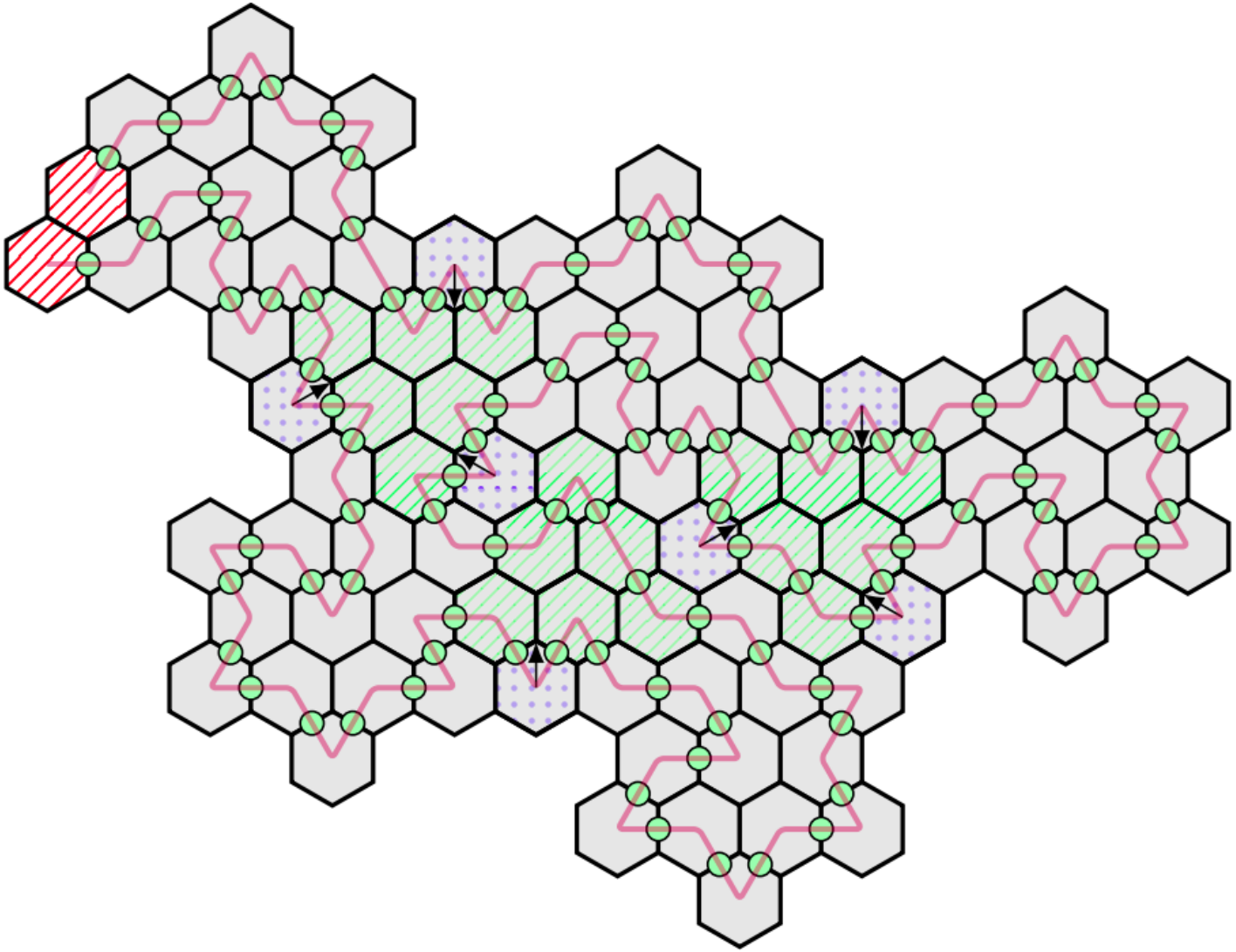
Twierdzenie 2

Dowód formalny - Wypełnianie dziur - Wizualizacja



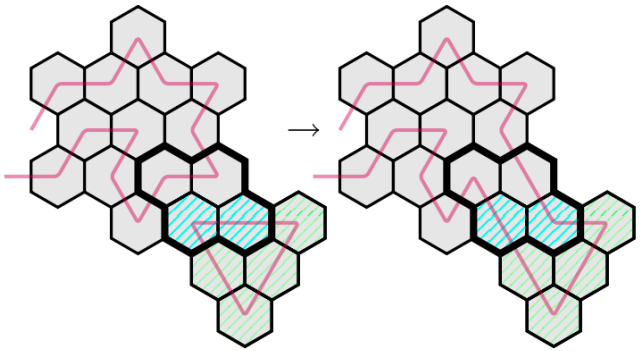
Twierdzenie 2

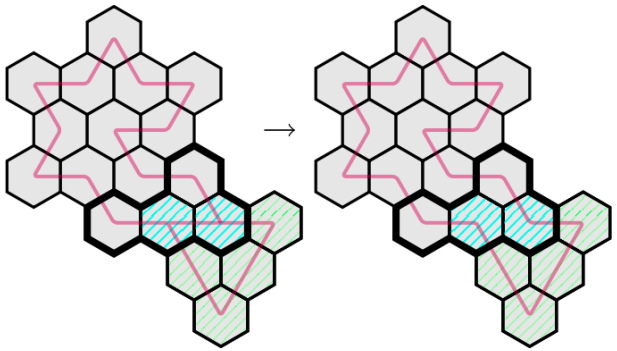
Dowód formalny - Wypełnianie dziur - Wizualizacja



Twierdzenie 2

Dowód formalny - Zamiany (Flips)





Twierdzenie 2

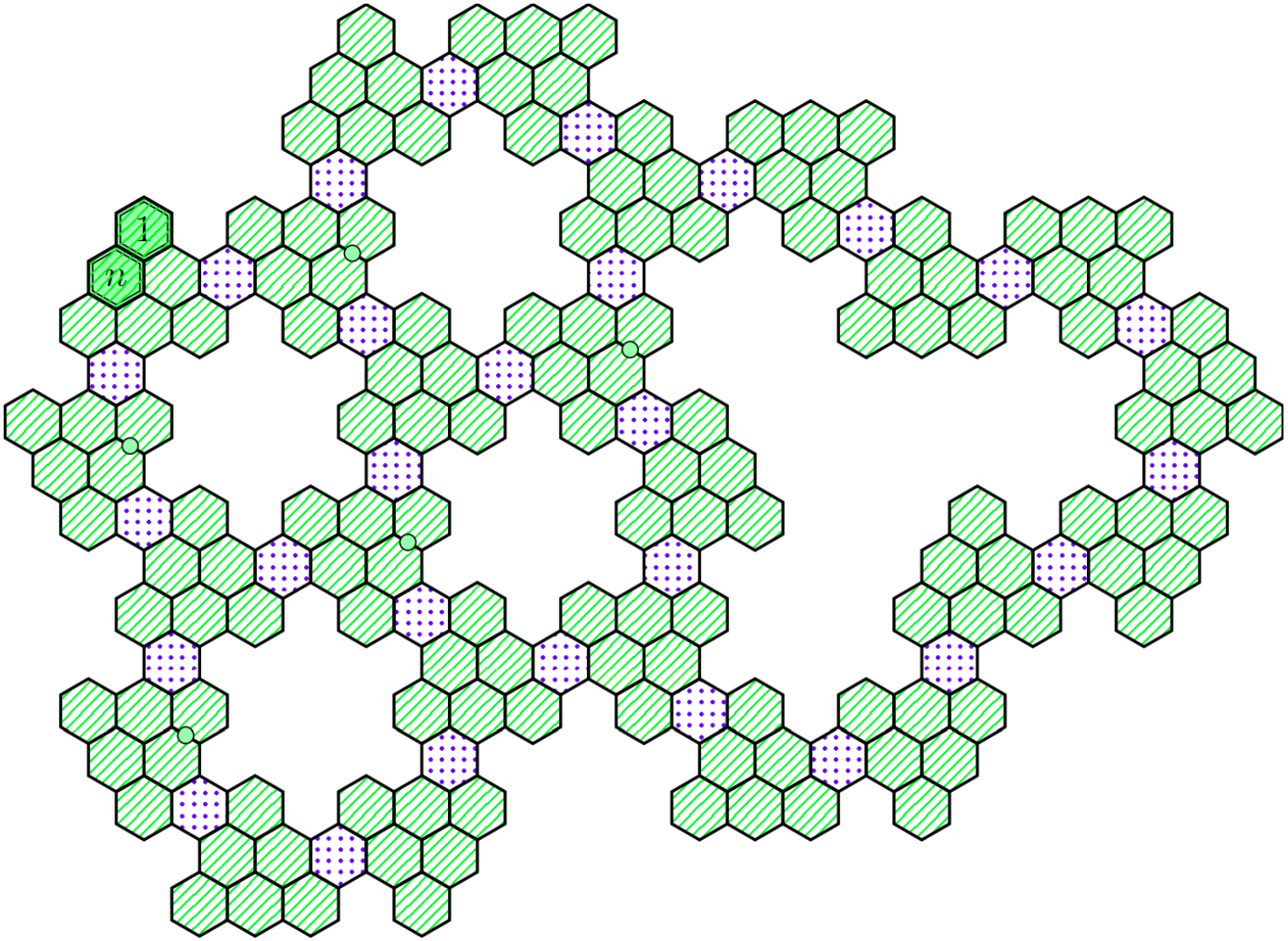
Dowód formalny - p i m

Dla każdej dziury $\tau^{''}$ z $\tau^{'}$ rozważmy ścieżkę $P^{\alpha}_{\tau^{''}[t]}$ z dostepem kanonicznym α i dodajmy sąsiedztwa tej ścieżki do p

Dla m weźmy dostęp $(t, t^{'})$ jakiegoś vertex gadget'u odpowiadający wierzchołkowi H o stopniu 2 taki, że $t, t^{'}$ nie pojawiają się w p. Niech $m(t) = 1$, a $m(t^{'}) = n$ (gdzie n to liczba wierzchołków τ).

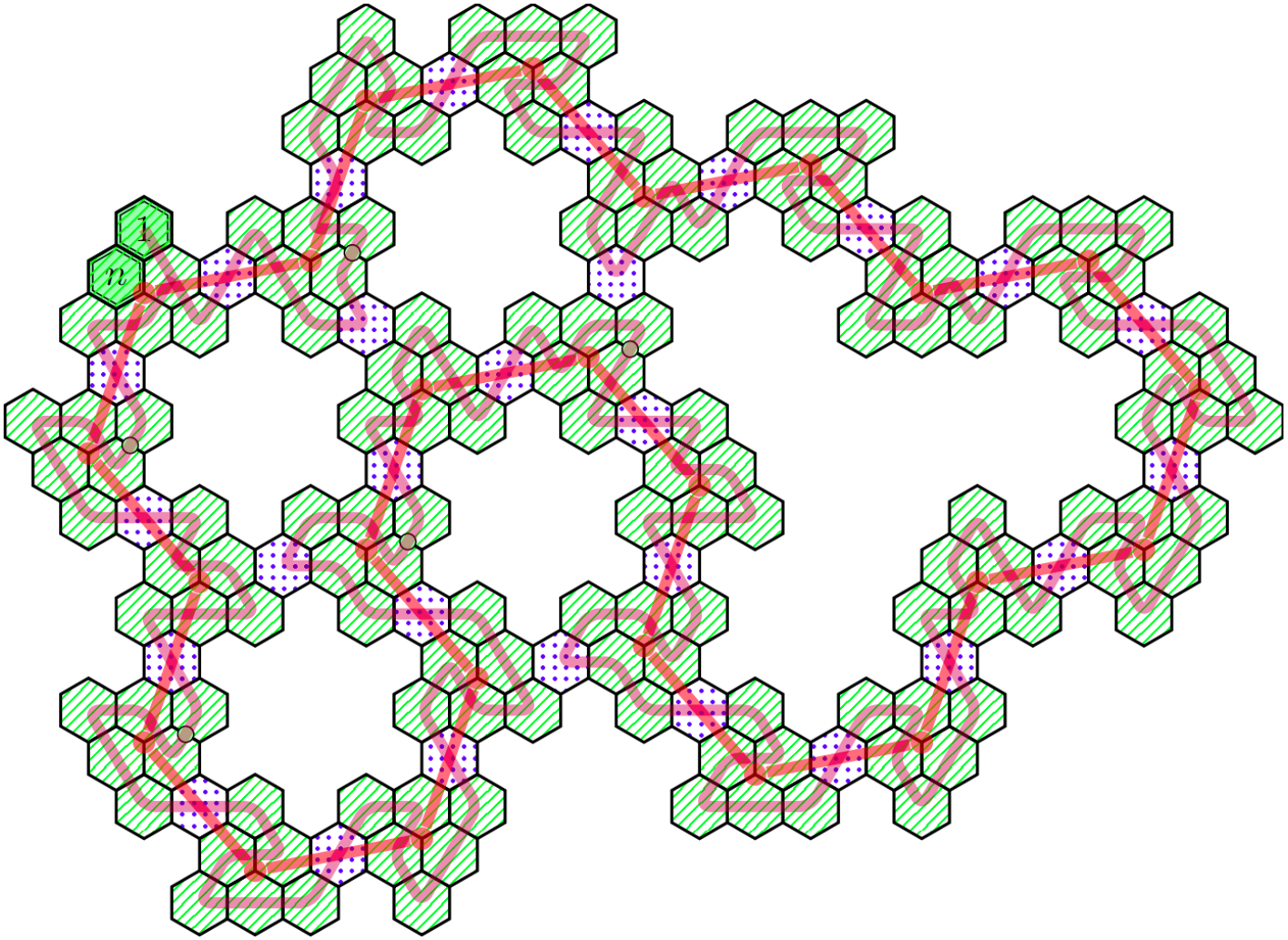
Twierdzenie 2

Dowód formalny - Równoważna gra $(\tau^{'}, m^{'}, p^{'})$



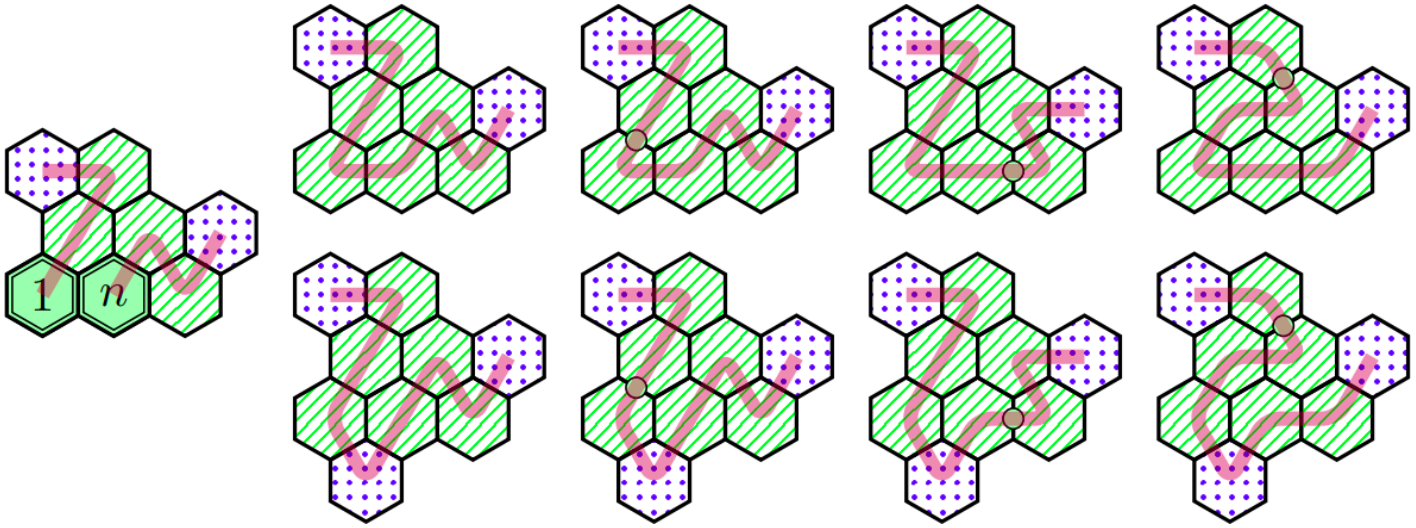
Twierdzenie 2

Dowód formalny - Rozwiązanie równoważnej gry $(\tau^{'}, m^{'}, p^{'})$



Twierdzenie 2

Możliwe ścieżki w vertex gadgetach równoważnej gry



Twierdzenie 2

Dowód formalny - Rozwiązanie równoważnej gry $(\tau^{'}, m^{'}, p^{'})$

Jeśli gra $(\tau^{'}, m^{'}, p^{'})$ ma rozwiązanie s, to kolejność wierzchołków indukowana przez $\leftrightsquigarrow_s$ daje ścieżkę Hamiltona w H:

- Przejście między vertex gadget'ami jest możliwe tylko przez edge gadget, zatem sąsiedztwa H są zachowane.
- Edge gadget składa się tylko z jednego wierzchołka, stąd nie można użyć dwa razy tej samej krawędzi H; stopień każdego wierzchołka wynosi 2 lub 3, stąd nie możemy odwiedzić żadnego wierzchołka H dwa razy.

Z powyższych rozwiązanie gry zawiera wszystkie wierzchołki i wraca do początkowego vertex gadget'u (dzięki $m^{'}$), zatem odpowiadający cykl w H jest cyklem Hamiltona. ■

α-Rikudo bez dziur

dla pewnej rzeczywistej stałej $0 < \alpha \leq 1$

α-Rikudo bez dziur (without holes)

Dane: gra (τ, m, p) takie, że $|\mathrm{dom}(m)| \geq \alpha n$ dla $n = |\tau|$
Pytanie: czy istnieje rozwiązanie?

α-Rikudo bez dziur - Rozwiązanie

dla rzeczywistej stałej $0 < \alpha \leq 1$

α-Rikudo bez dziur (without holes) - Rozwiązanie

Możemy skonstruować grę dla $n^{'}$ dodając przy pomocy m liczby z od $n^{'} + 1$ do $n = \lceil \frac{n^{'}}{\alpha} \rceil$).

1-nad-k-Rikudo

dla pewnej stałej $k \geq 2$

1-nad-k-Rikudo

Dane: gra (τ, m, p) takie, że $\mathrm{dom}(m) = \{xk + 1 | x \in \mathbb{N}\} \cap [n]$ dla $n = |\tau|$
Pytanie: czy istnieje rozwiązanie?

Twierdzenie 3

Theorem

1-*nad*-2-*Rikudo jest w P.*

Twierdzenie 3

Dowód - Redukcja do 2-SAT

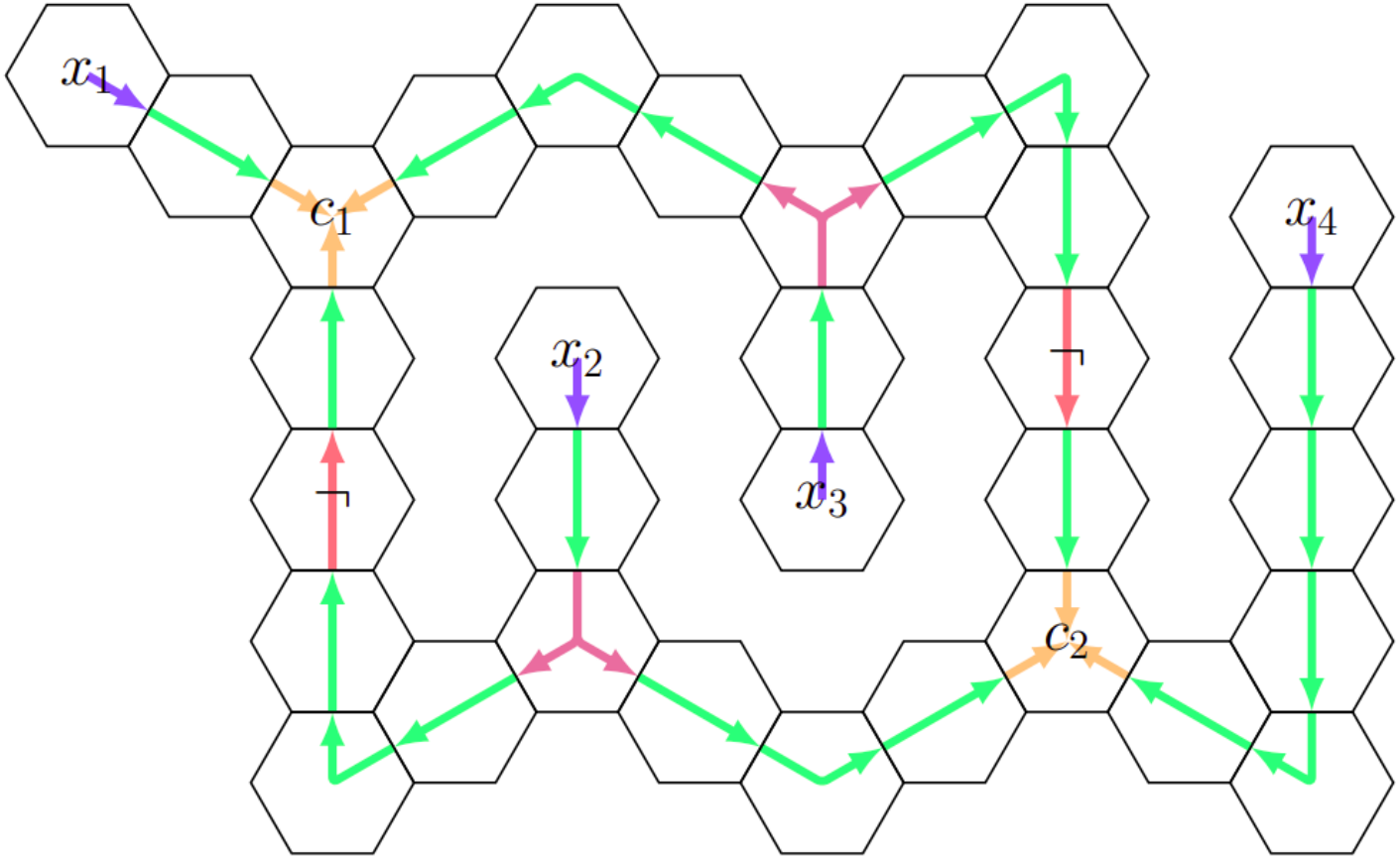
Konstruujemy formułę:

- $v_x^1 \vee v_x^2$ dla każdej pozostałej parzystej liczby x
- $\neg v_x^i \vee \neg v_y^i$ dla każdej pary zmiennych odpowiadających tej samej pozycji

Konstrukcja gwarantuje użycie każdej z pozostałych zmiennych i zapobiega dwukrotnemu wykorzystaniu tego samego pola. ■

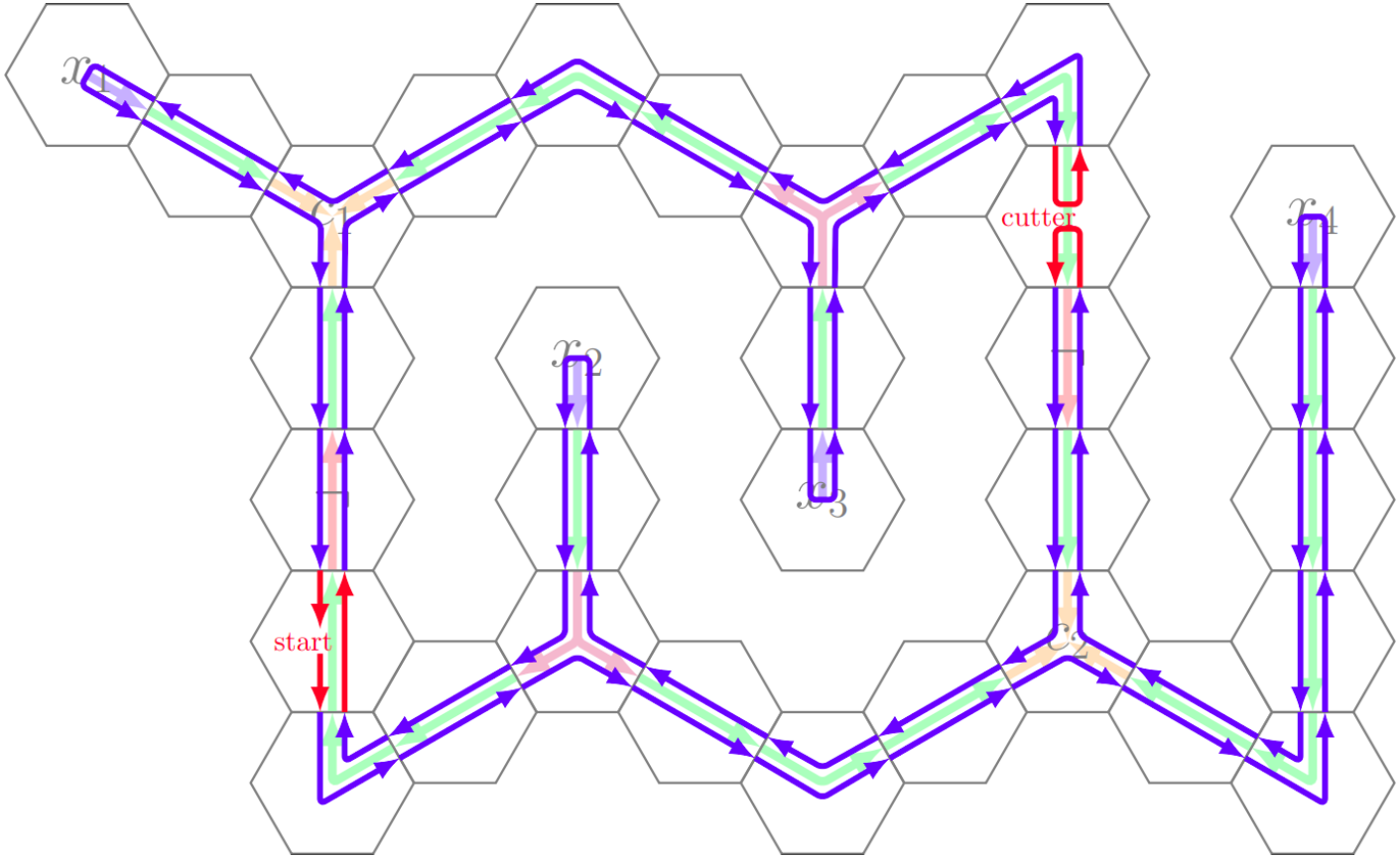
Twierdzenie 4

Przykładowe osadzenie (embedding)



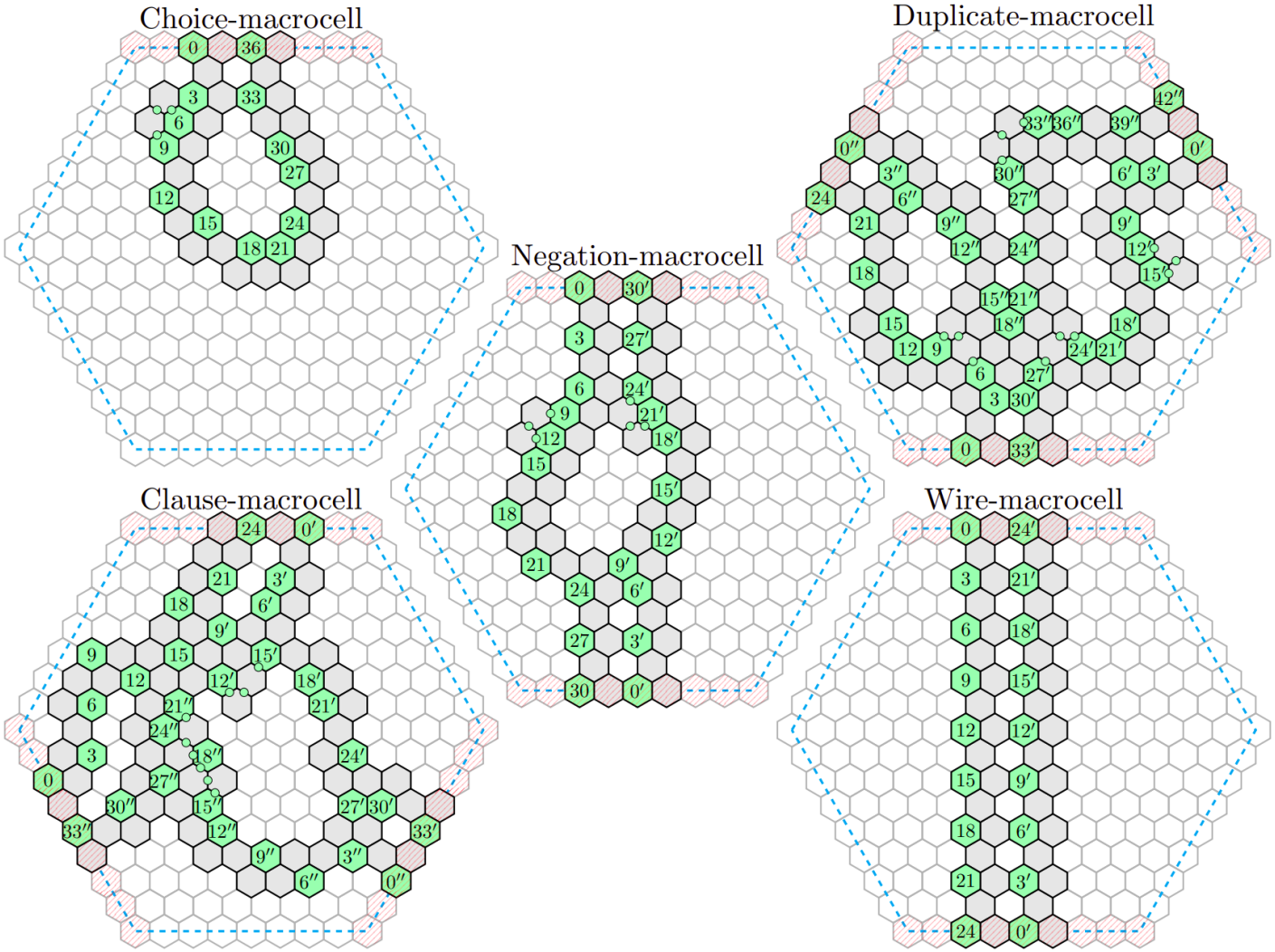
Twierdzenie 4

Przykładowe osadzenie (embedding) - drzewo rozpinające



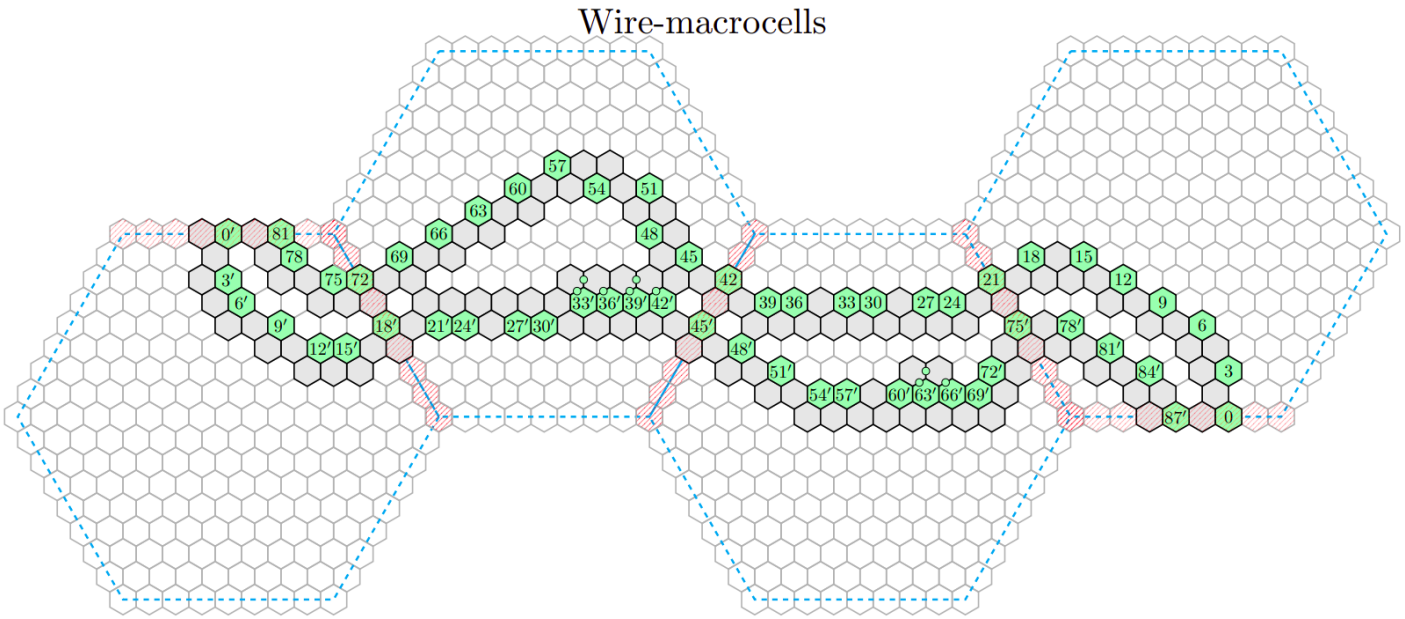
Twierdzenie 4

Makro-komórki (macrocells)



Twierdzenie 4

Makro-komórki (macrocells), cd



Źródła

1. Viet-Ha Nguyena and Kevin Perrota - Rikudo is NP-complete
2. K. Islam, H. Meijer, Y. Nunez, D. Rappaport, and H. Xiao - Hamilton Circuits in Hexagonal Grid Graphs

Koniec