Seminarium - Matematyka Dyskretna 6/05

On the maximum number of non attacking rooks on a high-dimensional simplicial chessboard

Mikołaj Kondratek

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

6 Maja 2021

Arash Ahadi[a], Mohsen Mollahajiaghaei[b], Ali Dehghan[c],

[a]Department of Mathematical and Computer Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran
[b]Department of Mathematics, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada
[c]Systems and Computer Engineering Department, Carleton University, Ottawa, Canada February 2, 2021

Plan

1. Wprowadzenie
2. Simplicial rook graph
    1. Definicje i pytania
    2. Liczba niezależna
    3. Liczba dominująca
    4. Cykl Hamiltona
3. Cyclic simplicial rook graph

Definicje

Simplicial rook graph - $\mathcal{SR}(m, n)$

Graf, którego wierzchołkami są wektory z $\mathbb{N}^m$ takie, że dla każdego wektora suma współrzędnych wynosi n, a dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą, jeśli wektory różnią się na dokładnie dwóch pozycjach.

Definicje

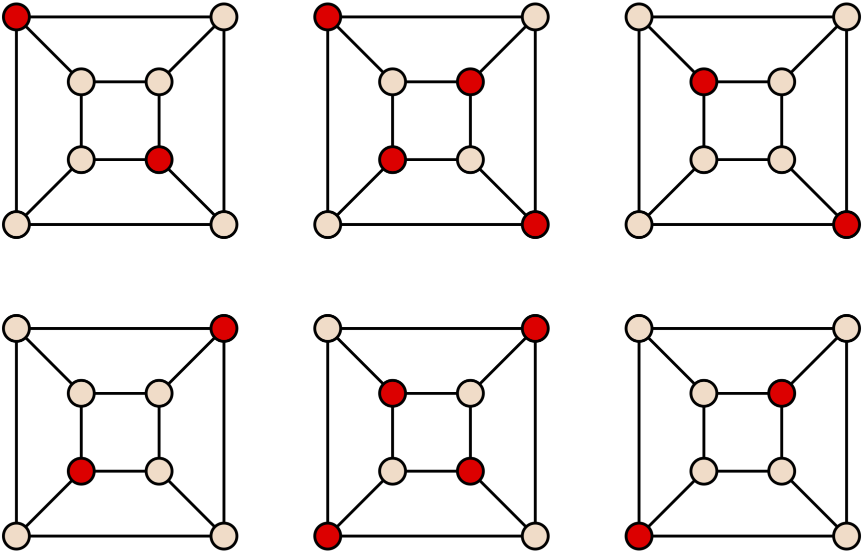
Zbiór niezależny

W grafie $G = (V, E)$ zbiór wierzchołków $V^{'} \subseteq V$, pomiędzy którymi nie ma żadnej krawędzi.

Liczba niezależna (?, independence number) - $\alpha(G)$

Rozmiar największego zbioru niezależnego.

Zbiór niezależny - przykład



Pytanie 1

What is the independence number of $\mathcal{SR}(m, n)$?

Pytanie 1

What is the independence number of $\mathcal{SR}(m, n)$?

Jaka jest maksymalna liczba nieatakujących się wież, które można ustawić na $(m-1)$ wymiarowej symplicjalnej szachownicy o boku $n+1$?

Definicje

Zbiór dominujący

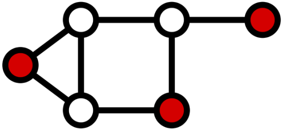
W grafie $G = (V, E)$ zbiór wierzchołków $V^{'} \subseteq V$ taki, że każdy wierzchołek, który nie należy do $V^{'}$ ma w $V^{'}$ conajmniej jendego sąsiada.

Liczba dominująca (dominating number) - $\gamma(G)$

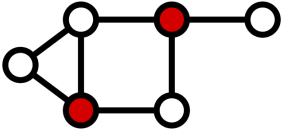
Rozmiar najmniejszego zbioru dominującego.

Zbiór dominujący - przykład

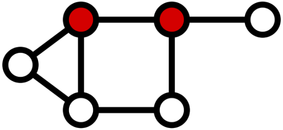
(a)



(b)



(c)



Pytanie 2

What is the dominating number of $\mathcal{SR}(m, n)$?

Simplicial rook graph - przykład

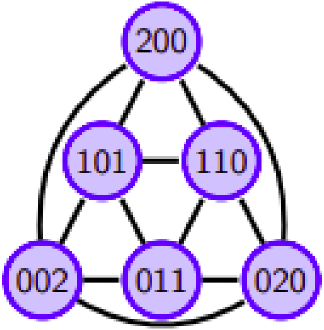


Figure 1: The simplicial rook graph $\mathcal{SR}(3,2)$.

Wierzchołek symplicjalny (simplicial vertex)

Wierzchołek v nazywamy *symplicjalnym* jeżeli indukowany podgraf $H = G[N_G[v]]$ jest grafem pełnym. Przyjmując $k = |V(H)| - 1$, H jest nazywany $k-$ *sympleksem* (lub po prostu *sympleksem*).

Graf symplicjalny (simplicial graph)

G jest nazywany *grafem symplicjalnym* jeśli każdy wierzchołek G jest wierzchołkiem symplicjalnym lub sąsiaduje z wierzchołkiem symplicjalnym G.

Twierdzenie 1

Theorem (1)

Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \geq \max(m, n)$, wtedy

$$\frac{\binom{n+m-1}{n}}{p} \leq \alpha(\mathcal{SR}(m, n)) \leq \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k, definiujemy $\mathcal{P}_k = \{(a_1, \ldots, a_m) | \sum_{i=1}^{m} ia_i = k\}$. Zbiory $\{\mathcal{P}_k | k \in \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}\}$ tworzą rozbicie zbioru wierzchołków $\mathcal{SR}(m, n)$.

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k, definiujemy $\mathcal{P}_k = \{(a_1, \ldots, a_m) | \sum_{i=1}^{m} ia_i = k\}$. Zbiory $\{\mathcal{P}_k | k \in \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}\}$ tworzą rozbicie zbioru wierzchołków $\mathcal{SR}(m, n)$.

Niech $p \geq \max(m, n)$ będzie liczbą pierwszą. Definiujemy $\Upsilon_t = \bigcup_{k \equiv t \ mod \ p} \mathcal{P}_k$. Zatem $\bigcup_{t \in [p]} \Upsilon_t$ jest rozbiciem zbioru wierzchołków $\mathcal{SR}(m, n)$.

Υ_t jest zbiorem niezależnym dla każdego t - dowód sokratejski

$t \in [p]$, $a, b \in \Upsilon_t$ sąsiadują w $\mathcal{SR}(m, n)$. Niech $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Zatem istnieją i i j takie, że $i \neq j$ oraz

$$a_i \neq b_i, a_j \neq b_j \qquad \text{bo } a \text{ i } b \text{ są sąsiadujące,} \qquad (1)$$

$$a_i + a_j = b_i + b_j \qquad \text{bo } a, b \in V(\mathcal{SR}(m, n)), \qquad (2)$$

$$ia_i + ja_j \equiv ib_i + jb_j \pmod p \qquad \text{bo } a, b \in \Upsilon_t \qquad (3)$$

Υ_t jest zbiorem niezależnym dla każdego t - dowód sokratejski

$t \in [p]$, $a, b \in \Upsilon_t$ sąsiadują w $\mathcal{SR}(m,n)$. Niech $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Zatem istnieją i i j takie, że $i \neq j$ oraz

$$\begin{aligned} a_i \neq b_i, a_j \neq b_j & \qquad \text{bo } a \text{ i } b \text{ są sąsiadujące,} \qquad (1)\\ a_i + a_j = b_i + b_j & \qquad \text{bo } a, b \in V(\mathcal{SR}(m,n)), \qquad (2)\\ ia_i + ja_j \equiv ib_i + jb_j \pmod{p} & \qquad \text{bo } a, b \in \Upsilon_t \qquad (3) \end{aligned}$$

Z (2) i (3) mamy $(i-j)(a_i - b_i) \equiv 0 \bmod p$. Ale (1) i $p \geq \max(m,n)$. $\lightning$

Υ_t jest zbiorem niezależnym dla każdego t - dowód sokratejski

$t \in [p]$, $a, b \in \Upsilon_t$ sąsiadują w $\mathcal{SR}(m, n)$. Niech $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Zatem istnieją i i j takie, że $i \neq j$ oraz

$$\begin{aligned} a_i \neq b_i, a_j \neq b_j & \qquad \text{bo } a \text{ i } b \text{ są sąsiadujące,} & (1) \\ a_i + a_j = b_i + b_j & \qquad \text{bo } a, b \in V(\mathcal{SR}(m, n)), & (2) \\ ia_i + ja_j \equiv ib_i + jb_j \pmod p & \qquad \text{bo } a, b \in \Upsilon_t & (3) \end{aligned}$$

Z (2) i (3) mamy $(i - j)(a_i - b_i) \equiv 0 \bmod p$. Ale (1) i $p \geq \max(m, n)$. ↯

Zatem dla każdego t, Υ_t jest zbiorem niezależnym. Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje i takie, że zbiór niezależny Υ_i ma co najmniej $\frac{|V(\mathcal{SR}(m,n))|}{p} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{p}$ wierzchołków.

$\mathcal{SR}(m, n)$ ma $\binom{n+m-1}{m-1}$ wierzchołków

Stars and bars...

$\mathcal{SR}(m, n)$ ma $\binom{n+m-1}{m-1}$ wierzchołków

Stars and bars. . .

$\mathcal{SR}(m, n)$ jest $n(m-1)$-regularny

Dla wierzchołka $x \in V(\mathcal{SR}(m, n))$ i każdej pary współrzędnych i, j mamy $x_i + x_j$ sąsiadujących wierzchołków.

$$\sum_{1 \le i < j \le m} (x_i + x_j) = (m-1) \sum_{i=1}^{m} x_i = (m-1)n$$

Ograniczenie Hoffmana na zbiór niezależny

Jeśli G jest grafem r-regularnym na $V(G)$ wierzchołkach, którego macierz sąsiedztwa ma minimalną wartość własną λ_{min}, to $\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\text{min}}}{r-\lambda_{\text{min}}}|V(G)|$.

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne

Ograniczenie Hoffmana na zbiór niezależny

Jeśli G jest grafem r-regularnym na $V(G)$ wierzchołkach, którego macierz sąsiedztwa ma minimalną wartość własną λ_{min}, to $\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\text{min}}}{r-\lambda_{\text{min}}}|V(G)|$.

Notes on simplicial rook graph

$$\lambda_{\text{min}} = \max\left(-n, -\binom{m}{2}\right)$$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n}$$

Twierdzenie 1 - dowód
Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n}$$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$n > \binom{m}{2}$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$n > \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n}$$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\text{min}}}{r - \lambda_{\text{min}}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$n > \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\text{min}}}{r - \lambda_{\text{min}}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{m}{2}\binom{n+m-1}{n}}{n(m-1)+\binom{m}{2}}$$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$n > \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{m}{2}\binom{n+m-1}{n}}{n(m-1)+\binom{m}{2}}$$

$$< \frac{\binom{m}{2}\binom{n+m-1}{n}}{\binom{m}{2}(m-1)+\binom{m}{2}}$$

Twierdzenie 1 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$n \leq \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{n}{n(m-1)+n} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$n > \binom{m}{2}$

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}} \binom{n+m-1}{n} = \frac{\binom{m}{2}\binom{n+m-1}{n}}{n(m-1)+\binom{m}{2}}$$

$$< \frac{\binom{m}{2}\binom{n+m-1}{n}}{\binom{m}{2}(m-1)+\binom{m}{2}} = \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

$$\alpha(\mathcal{SR}(m,n)) = (1 - o(1))\frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$$

Prime number theorem

$$\forall_{\epsilon<0}\exists_{M>0}\forall_{M'>M}\exists_{p} M^{'} < p < (1+\epsilon)M^{'}$$

Twierdzenie 2

Theorem (2)

Ze względu na n, mamy

$$\gamma(\mathcal{SR}(m, n)) = \Theta(n^{m-2})$$

Fakt

Dla każdego grafu G mamy $\gamma(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$

$$\gamma(\mathcal{SR}(m,n)) \geq \frac{\binom{n+m-1}{m-1}}{n(m-1)+1}$$

Twierdzenie 2 - dowód

Ograniczenie dolne

Fakt

Dla każdego grafu G mamy $\gamma(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$

$$\gamma(\mathcal{SR}(m,n)) \geq \frac{\binom{n+m-1}{m-1}}{n(m-1)+1} = \frac{\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}}{n(m-1)+1}$$

Twierdzenie 2 - dowód
Ograniczenie dolne

Fakt

Dla każdego grafu G mamy $\gamma(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$

$$\gamma(\mathcal{SR}(m,n)) \geq \frac{\binom{n+m-1}{m-1}}{n(m-1)+1} = \frac{\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}}{n(m-1)+1} = \Omega(n^{m-2})$$

Rozważmy $D = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = x_2\}$

D jest zbiorem dominującym

Weźmy dowolny $a = (a_1, \ldots, a_m)$ z $\mathcal{SR}(m, n)$.

Rozważmy $D = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = x_2\}$

D jest zbiorem dominującym

Weźmy dowolny $a = (a_1, \ldots, a_m)$ z $\mathcal{SR}(m, n)$.

$$a_2 > a_1 \qquad (a_1, a_1, a_3 - a_1 + a_2, \ldots, a_m) \in D \tag{4}$$

$$a_1 > a_2 \qquad (a_2, a_2, a_3 - a_2 + a_1, \ldots, a_m) \in D \tag{5}$$

$$a_1 = a_2 \qquad a \in D \tag{6}$$

Twierdzenie 2 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$$|D| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |V(\mathcal{SR}(m-2, n-2i))|$$

Twierdzenie 2 - dowód

Ograniczenie górne, cd

$$|D| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |V(\mathcal{SR}(m-2, n-2i))|$$

$$|D| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+m-3-2i}{m-3}$$

$$\binom{n+m-3-2i}{m-3} \leq \left(\binom{n+m-3-2i}{m-3} + \binom{n+m-3-2i+1}{m-3} \right) /2$$

$$|D| \leq \sum_{i=-1}^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+m-3-i}{m-3}$$

Twierdzenie 2 - dowód
Podsumowanie

Stosując $\binom{x-1}{y} + \binom{x-1}{y-1} = \binom{x}{y}$, mamy

$$|D| \leq \frac{1}{2}\binom{n+m-1}{m-2} = \mathcal{O}(n^{m-2})$$

Stosując $\binom{x-1}{y} + \binom{x-1}{y-1} = \binom{x}{y}$, mamy

$$|D| \leq \frac{1}{2}\binom{n+m-1}{m-2} = \mathcal{O}(n^{m-2})$$

$$\Omega(n^{m-2}) \leq \gamma(\mathcal{SR}(m,n)) \leq \mathcal{O}(n^{m-2}) \implies \gamma(\mathcal{SR}(m,n)) = \Theta(n^{m-2})$$

Twierdzenie 3

Theorem (3)

Simplicial rook graph $\mathcal{SR}(m, n)$ jest hamiltonowski (ma cykl Hamiltona) dla dowolnych wartości m i n prócz $m = 1$ i $(m, n) = (2, 1)$.

Theorem (3*)

Simplicial rook graph $\mathcal{SR}(m, n)$ *jest hamiltonowski (ma cykl Hamiltona) dla dowolnych wartości* m *i* n *prócz* $m = 1$ *i* $(m, n) = (2, 1)$ *i zawiera krawędź* $e_n^m = (n, 0^{m-1})(n-1, 1, 0^{m-2})$

Twierdzenie 3* - dowód dla $n = 1$

Niech $m \geq 3$, wtedy $\mathcal{SR}(m, 1)$ jest grafem pełnym K_m, zatem ma cykl idący przez krawędź $e_1^m = (1, 0^{m-1})(0, 1, 0^{m-2})$.

Twierdzenie 3* - dowód dla $n > 1$

Przypadek bazowy

Dla $m = 2$, mamy $\mathcal{SR}(2, n)$ (gdzie $n \geq 2$). Graf $\mathcal{SR}(2, n)$ jest pełnym grafem K_{n+1}, zatem ma cykl idący przez krawędź $e_n^2 = (n, 0)(n, n-1)$.

Twierdzenie 3* - dowód dla $n > 1$

Przypadek bazowy

Dla $m = 2$, mamy $\mathcal{SR}(2, n)$ (gdzie $n \geq 2$). Graf $\mathcal{SR}(2, n)$ jest pełnym grafem K_{n+1}, zatem ma cykl idący przez krawędź $e_n^2 = (n, 0)(n, n-1)$.

Krok idukcyjny

Rozważamy $\mathcal{SR}(m, n)$, gdzie $m \geq 3$, $n \geq 2$. Pokazujemy, że istnieje cykl H. przechodzący przez $e_n^m = (n, 0^{m-1})(n-1, 1, 0^{m-2})$.

Twierdzenie 3* - dowód dla $n > 1$

Krok idukcyjny, cd

$\forall_{k\in[n]}\ \mathcal{SR}(m-1,k)$ ma cykl H. przechodzący przez $e_k^{m-1} = (k,0^{m-2})(k-1,1,0^{m-3})$. Niech H_k^{m-1} będzie zbiorem krawędzi $E(\mathcal{C}_k) \setminus e_k^{m-1}$.

Twierdzenie 3* - dowód dla $n > 1$

Krok idukcyjny, cd

$\forall_{k \in [n]}\ \mathcal{SR}(m-1, k)$ ma cykl H. przechodzący przez $e_k^{m-1} = (k, 0^{m-2})(k-1, 1, 0^{m-3})$. Niech H_k^{m-1} będzie zbiorem krawędzi $E(\mathcal{C}_k) \setminus e_k^{m-1}$. Następujące krawędzie tworzą cykl H. dla $\mathcal{SR}(m, n)$:

$$
\begin{cases}
\bigcup_{k=1}^{n} \{(n-k,\ \dots u)(n-k,\ \dots v) \mid uv \in H_k^{m-1}\} \\
\bigcup_{k=2}^{n} \{(n-k, k-1, 1, 0^{m-3})(n-k+1, k-1, 0^{m-2})\} \\
\bigcup \{(n-1, 0, 1, 0^{m-3})(n, 0^{m-1})\} \\
\bigcup \{(n, 0^{m-1})(0, n, 0^{m-2})\}
\end{cases}
$$

Twierdzenie 3* - dowód dla $n > 1$

Krok idukcyjny, cd

$\forall_{k\in[n]}\ \mathcal{SR}(m-1,k)$ ma cykl H. przechodzący przez $e_k^{m-1} = (k, 0^{m-2})(k-1, 1, 0^{m-3})$. Niech H_k^{m-1} będzie zbiorem krawędzi $E(\mathcal{C}_k) \setminus e_k^{m-1}$. Następujące krawędzie tworzą cykl H. dla $\mathcal{SR}(m,n)$:

$$\begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n}\{(n-k,\ \ldots u)(n-k,\ \ldots v) \mid uv \in H_k^{m-1}\} \\ \bigcup_{k=2}^{n}\{(n-k, k-1, 1, 0^{m-3})(n-k+1, k-1, 0^{m-2})\} \\ \bigcup\{(n-1, 0, 1, 0^{m-3})(n, 0^{m-1})\} \\ \bigcup\{(n, 0^{m-1})(0, n, 0^{m-2})\} \end{cases}$$

$\bigcup_{k=1}^{n}\{(n-k,\ \ldots u)(n-k,\ \ldots v) \mid uv \in H_k^{m-1}\}$ są n ścieżkami $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ tworzącymi rozbicie zbioru $V(\mathcal{SR}(m,n))$.
$\bigcup_{k=2}^{n}\{(n-k, k-1, 1, 0^{m-3})(n-k+1, k-1, 0^{m-2})\}$ łączą $\mathcal{P}_i$ z $\mathcal{P}_{i+1}$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $C = v_1, \ldots, v_z$ (ścieżka H.). Niech $f : V(\mathcal{SR}(m, n)) \longrightarrow V(\mathcal{SR}(m, n))$, która wierzchołkowi $v_i = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ przyporządkowuje $v_i^{'} = (a_1, a_3, a_2, \ldots, a_m)$. $\mathcal{C}$ zawiera $(n-1, 0, 1, 0^{m-3})(n, 0^{m-1})$, zatem $\mathcal{C}^{'} = f(v_1), \ldots, f(v_z)$ zawiera $(n-1, 1, 0^{m-2})(n, 0^{m-1})$. $\square$

Definicje

Cyclic simplicial rook graph - $\mathcal{CSR}(m, n)$

Graf, którego wierzchołkami są wektory z Z^m takie, że dla każdego wektora suma współrzędnych wynosi 0 $(mod\ \ n)$, a dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą, jeśli wektory różnią się na dokładnie dwóch pozycjach.

Twierdzenie 4

Theorem (4)

1. *Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że* $p \geq \max(m, n)$, *wtedy* $m \leq \chi(\mathcal{CSR}(m, n)) \leq p$
2. *Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że* $p \geq \max(m, n)$, *wtedy* $\frac{\binom{n+m-1}{n}}{p} \leq \alpha(\mathcal{CSR}(m, n)) \leq \frac{\binom{n+m-1}{n}}{m}$
3. *jeśli* $m, n \neq 1$, *to* $\omega(\mathcal{CSR}(m, n)) = \max(m, n)$ *(ω - liczba klikowa)*

Szkice dowodów

1. Z dołu *Hoffman's bound*, z góry $\Upsilon_{t \in [p]}$.
2. Tak jak *Twierdzenie 1*.
3. ...

Theorem (5)

$$diam(\mathcal{CSR}(m, n)) = m - \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor - 1$$

Twierdzenie 6

Theorem (6)

Wynaczenie odległości między dwoma wierzchołkami $\mathcal{CSR}(m, n)$ *jest problemem NP-trudnym względem m i n.*

Źródła

1. Arash Ahadi, Mohsen Mollahajiaghaei, Ali Dehghan - On the maximum number of non attacking rooks on a high-dimensional simplicial chessboard
2. Lourdes Cruz, Yuriko Pitones, and Enrique Reyes - Unmixedness of some weighted oriented graph
3. Andries E. Brouwer, Sebastian M. Cioaba, Willem H. Haemers, Jason R. Vermette - Notes on simplicial rook graphs
4. JEREMY L. MARTIN AND JENNIFER D. WAGNER - ON THE SPECTRA OF SIMPLICIAL ROOK GRAPHS

Koniec