

Acykliczne kolorowanie grafów

i metoda kompresji entropii

Małgorzata Dymek

Informatyka stopień II rok I
Uniwersytet Jagielloński

Twierdzenia

Theorem (1)

Dla każdego grafu G z maksymalnym stopniem wierzchołka $\Delta \geq 24$ spełnione jest

$$\chi_a(G) < \min \left\{ \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14, \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1 \right\}.$$

Theorem (2)

Niech $\gamma \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$ oraz $G \in \mathcal{K}_\gamma$ z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ . Wtedy

$$\chi_a(G) \leq \left\lceil \Delta(1 + \sqrt{2\gamma + 4}) \right\rceil.$$

gdzie \mathcal{K}_γ jest rodziną grafów nie zawierających $K_{2,\gamma+1}$ takich, że wierzchołki pierwszej klasy ze sobą nie sąsiadują.

Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla $G \in \mathcal{K}_\gamma$

Theorem (2)

Niech $\gamma \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$ oraz $G \in \mathcal{K}_\gamma$ z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ . Wtedy

$$\chi_a(G) \leq \lceil \Delta(1 + \sqrt{2\gamma + 4}) \rceil.$$

Dowód:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje graf $G \in \mathcal{K}_\gamma$ z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ takim, że $\chi_a(G) > \lceil \Delta(1 + \sqrt{2\gamma + 4}) \rceil$.

Definiujemy algorytm, który “próbuje” pokolorować acyklicznie graf G $\kappa = \lceil \Delta(1 + \sqrt{2\gamma + 4}) \rceil$ kolorami. Niech \prec będzie dowolnym porządkiem liniowym wierzchołków G .

Niech $V \in \{1, 2, \dots, \kappa\}^t$ będzie wektorem kolorów długości pewnego dużego $t \gg n = |V(G)|$.

Algorytm próbuje pokolorować G kolorami z V i zwraca częściowe acykliczne kolorowanie $\varphi : V(G) \rightarrow \{\cdot, 1, 2, \dots, \kappa\}$ oraz rejestr operacji R .

AcyclicColoringGamma_G

Algorithm 1: ACYCLICCOLORINGGAMMA_G

Input : V (vector of length t).

Output: (φ, R) .

```
1 for all  $v$  in  $V(G)$  do
2    $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
3  $R \leftarrow \text{newfile}()$ 
4 for  $i \leftarrow 1$  to  $t$  do
5   Let  $v$  be the smallest (w.r.t.  $<$ ) uncolored vertex of  $G$ 
6    $\varphi(v) \leftarrow V[i]$ 
7   Write "Color \n" in  $R$ 
8   if  $\varphi(v) = \varphi(u)$  for  $u \in N(v)$  then
9     // Proper coloring issue
9      $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
10    Write "Uncolor, neighbor  $u$  \n" in  $R$ 
11  else if  $v$  belongs to a bicolored cycle of length  $2k$  ( $k \geq 2$ ), say  $(v = u_1, \dots, u_{2k})$  then
12    // Bicolored cycle issue
12    for  $j \leftarrow 1$  to  $2k - 2$  do
13       $\varphi(u_j) \leftarrow \bullet$ 
14    Write "Uncolor,  $2k$ -cycle  $(v = u_1, \dots, u_{2k})$  \n" in  $R$ 
15 return  $(\varphi, R)$ 
```

Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla $G \in \mathcal{K}_\gamma$

Theorem (2)

Niech $\gamma \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$ oraz $G \in \mathcal{K}_\gamma$ z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ . Wtedy

$$\chi_a(G) \leq \left\lceil \Delta(1 + \sqrt{2\gamma + 4}) \right\rceil.$$

Dowód:

Z każdego wyniku (φ, R) algorytmu `AcyclicColoringGamma_G` możemy jednoznacznie wyznaczyć odpowiadające mu V (Lemat 3), zatem funkcja mapująca V na (φ, R) jest iniekcją. Liczba możliwych wejść V jest równa κ^t .

Istnieje co najwyżej $(1 + \kappa)^n$ możliwych częściowych κ -kolorowań φ grafu G oraz co najwyżej $o(\kappa^t)$ możliwych rejestrów R (Lemat 8). Zatem liczba możliwych wyników (φ, R) jest rzędu $o(\kappa^t)$ (co najwyżej $(1 + \kappa)^n \times o(\kappa^t)$ i $t \gg n$).

Wynikłoby z tego, że liczba możliwych wyników $o(\kappa^t)$ jest mniejsza od liczby możliwych wejść κ^t dla odpowiednio dużego t , co prowadzi do sprzeczności z różnowartościowością funkcji mapującej.



AcyclicColoringGamma_G

φ_i – częściowe acykliczne kolorowanie otrzymane po i krokach AcyclicColoringGamma_G

$\bar{\varphi}_i \subset V(G)$ – zbiór wierzchołków pokolorowanych w φ_i

v_i – wierzchołek rozpatrywany w i -tym kroku

R_i – rejestr R po i krokach

V_i – wektor wejściowy V ograniczony do jego pierwszych i elementów.

φ_i — częściowe acykliczne κ -kolorowanie grafu G

G nie jest acyklicznie κ -kolorowalny



$\bar{\varphi}_i \subsetneq V(G) \Rightarrow v_{i+1}$ jest jednoznacznie zdefiniowane,

Dodatkowo R posiada dokładnie i linii "Color". Widać, że R_i odpowiada tym liniom z R , które znajdują się przed $(i + 1)$ -szą linią "Color".

Lemma (3)

Mając dane (φ_i, R_i) z algorytmu *AcyclicColoringGamma_G*, możemy jednoznacznie wyznaczyć odpowiadający im V_i .

Dowód:

Wystarczy pokazać, że z (φ_i, R_i) jesteśmy w stanie wyprowadzić (φ_{i-1}, R_{i-1}) i $V[i]$.

Przeprowadzimy dowód poprzez indukcję na i .

1. V_0 może być uzyskane w sposób trywialny z (φ_0, R_0) – jest puste.
2. Dla dowolnego i , R_{i-1} możemy pozyskać z R_i poprzez rozpatrzenie linii przed ostatnią linią "Color". Następnie z R_{i-1} możemy prosto odtworzyć $\bar{\varphi}_{i-1}$ oraz v_i .

Lemma (3)

Mając dane (φ_i, R_i) z algorytmu *AcyclicColoringGamma_G*, możemy jednoznacznie wyznaczyć odpowiadający im V_i .

Zauważmy, że w i -tym kroku dopisujemy do rejestru jedną linię "Color" i co najwyżej jedną linię "Uncolor". Rozpatrzmy trzy przypadki:

- Jeśli ostatnia linia to linia "Color", to $V[i] = \varphi_i(v_i)$, a φ_{i-1} uzyskujemy z φ_i poprzez odkolorowanie v_i .
- Jeśli ostatnia linia to linia "Uncolor, neighbour" u , to $V[i] = \varphi_i(u)$ i $\varphi_{i-1} = \varphi_i$.
- Jeśli ostatnia linia to linia "Uncolor, 2k-cycle" (u_1, \dots, u_{2k}) , to $V[i] = \varphi_i(u_{2k-1})$, a φ_{i-1} uzyskujemy z φ_i poprzez pokolorowanie wierzchołków u_j dla $2 \leq j \leq 2k - 2$ w taki sposób, że $\varphi_{i-1}(u_j)$ jest równe $\varphi_i(u_{2k-1})$ jeśli j jest nieparzyste, lub $\varphi_i(u_{2k})$ wpp.



Cechy rejestru – “złe wydarzenia”

Ponieważ algorytm `AcyclicColoringGamma_G` nie jest w stanie pokolorować G , rejestr R ma dokładnie t linii “Color” (długość wektora wejściowego). Zawiera również linie “Uncolor” różnego typu: “neighbour” (typ 1), “4-cycle” (typ 2), “6-cycle” (typ 3), ..., “n-cycle” (typ $\frac{n}{2}$).

Niech $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ będzie zbiorem typów tych “złych wydarzeń”. Oznaczmy przez s_j liczbę wierzchołków odkolorowywanych przez wydarzenie typu j .

- Dla zdarzenia typu “Uncolor, neighbour” odkolorowywany jest jeden wierzchołek, zatem $s_1 = 1$.
- Dla zdarzeń typu “Uncolor, $2k$ -cycle” odkolorowywane jest $2k - 2$ wierzchołków, zatem $s_k = 2k - 2$ dla $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Cechy rejestru – ilość możliwych rejestrów

Aby policzyć całkowitą liczbę możliwych do stworzenia rejestrów policzmy liczbę możliwych różnych wpisów, oznaczoną przez C_j , spowodowanych linią “Uncolor” typu j .

- Linia “Uncolor, neighbour” może wyprodukować Δ różnych wpisów – stąd $C_1 = \Delta$.
- Linia “Uncolor, 2k-cycle” jest powiązana z cyklem długości $2k$ przechodzącym przez v – których ilość jest ograniczona przez $\frac{1}{2}\gamma\Delta^{2k-2}$ (*), stąd $C_k = \frac{1}{2}\gamma\Delta^{2k-2}$ dla $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Każda linia “Uncolor” jest powiązana z pewnym wydarzeniem typu j , $j \in \mathcal{T}$, których liczba nie przekracza C_j , zatem możemy je ponumerować od 1 do C_j .

Będziemy odnosić się k -tego do wydarzenia typu j jako do wydarzenia (j, k) .

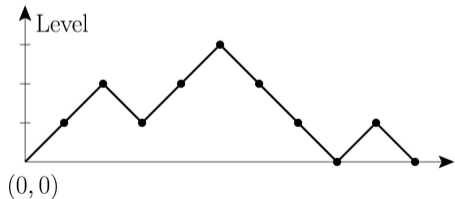
(*) Alon N., McDiarmid C., Reed B. *Acyclic coloring of graphs*, Lemma 3.2.

Ścieżka Dycka

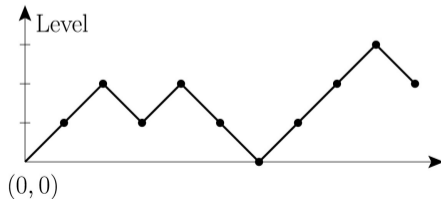
Ścieżka Dycka – ścieżka po kracie (ang. *lattice path*), zaczynająca się w punkcie $(0, 0)$ i kończąca na osi x , złożona z kroków “w górę” (\nearrow) i “w dół” (\searrow) i nie schodząca poniżej osi x .

Generalizowana ścieżka Dycka (and. *generalized*) – dowolna podścieżka ścieżki Dycka zaczynająca się w punkcie $(0, 0)$ – niekoniecznie kończąca się na osi x .

Poziom ścieżki Dycka – różnica liczby kroków “w górę” i “w dół”.



(a) A Dyck path.



(b) A generalized Dyck path.

Cechy rejestru – ścieżka Dycka

Rejestr możemy przedstawić jako generalizowaną ścieżkę Dycka.

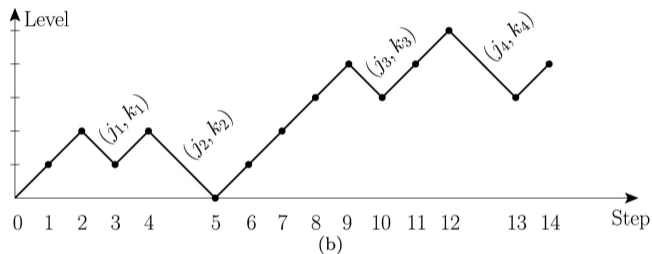
Każdej linii “Color” odpowiada krok “w górę”, a każdej linii “Uncolor” odpowiednia ilość kroków “w dół” (oznaczamy przez s). Używamy **adnotacji** do opisanie “spadków” będących wynikiem danego złego wydarzenia.

Poziom w danym momencie ścieżki rejestru odpowiada **ilości pokolorowanych wierzchołków**.

Cechy rejestru – ścieżka Dycka

Color
Color
Uncolor, Bad Event j_1, k_1
Color
Uncolor, Bad Event j_2, k_2
Color
Color
Color
Color
Uncolor, Bad Event j_3, k_3
Color
Color
Uncolor, Bad Event j_4, k_4
Color

(a)



$$s_{j_1} = 1, s_{j_2} = 2, s_{j_3} = 1, s_{j_4} = 2$$

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Theorem (4)

Liczba generalizowanych ścieżek Dycka z adnotacjami, o wielkości t , z parametrami $(s_j, C_j)_{j \in \mathcal{T}}$, wynosi co najwyżej

$$o \left(\left(\frac{Q(x)}{x} \right)^t \right),$$

gdzie $Q(x) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j x^{s_j}$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$.

W praktyce staramy się zminimalizować wartość $\frac{Q(x)}{x}$. Zauważmy:

- Jeśli $s_j = 1$ dla każdego $j \in \mathcal{T}$, to minimum osiągamy dla $x = 1$ i $\frac{Q(x)}{x} = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j$.
- Wpp. minimum osiągamy dla unikalnego, dodatniego rozwiązania wielomianu

$$P(x) = -1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} (s_j - 1) C_j x^{s_j}.$$

Schemat gładkich funkcji niejawnych

Definition (6)

Schemat gładkich funkcji niejawnych (ang. *Smooth Implicit-Function Schema*).

Niech $A(y)$ będzie funkcją analityczną w okolicy 0 taką, że

$$A(y) = \sum_{t \geq 0} a_t y^t, \quad a_0 = 0, a_t \geq 0.$$

...

Źródło: Flajolet P., Sedgewick R. *Analytic Combinatorics*, Definition VII.4, p. 467.

Schemat gładkich funkcji niejawnych

Definition (6)

Niech $A(y)$ będzie funkcją analityczną w okolicy 0 taką, że $A(y) = \sum_{t \geq 0} a_t y^t$, $a_0 = 0$, $a_t \geq 0$. Mówimy, że $A(y)$ należy do **schematu gładkich funkcji niejawnych** jeśli istnieje funkcja

$$G(y, z) = \sum_{m, n \geq 0} g_{m, n} y^m z^n \wedge A(y) = G(y, A(y))$$

- (a) $G(y, z)$ jest analityczna w dziedzinie $|y| < R|z| < S$ dla pewnych R, S .
- (b) Współczynniki G spełniają: $g_{m, n} \geq 0$, $g_{0, 0} = 0$, $g_{0, 1} \neq 1$, $g_{m, n} > 0$ dla pewnych $m \geq 0$ i $n \geq 2$.
- (c) Istnieją dwie liczby r i s takie, że $0 < r < R$ i $0 < s < S$ spełniające układ równań

$$G(r, s) = s, G_z(r, s) = 1$$

zwany **układem charakterystycznym**, gdzie G_z oznacza pochodną po z .

Twierdzenie 7

Theorem (7)

Niech $A(y)$ należy do schematu gładkich funkcji niejawnych przez funkcję $G(y, z)$ z dodatnim rozwiązaniem układu charakterystycznego (r, s) . Wtedy $A(y)$ ma granicę w punkcie $y = r$

$$\lim_{y \rightarrow r} A(y) = s - \gamma \sqrt{1 - \frac{y}{r}} + O\left(1 - \frac{y}{r}\right)$$

gdzie $\gamma = \sqrt{\frac{2rG_y(r,s)}{G_{zz}(r,s)}}$.

Dodatkowo, jeśli $A(y)$ nie jest okresowa, to r jest "unique dominant singularity" funkcji A i współczynniki spełniają wyrażenie:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y^t]A(y) = \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi t^3}} r^{-t} (1 + O(t^{-1})).$$

Źródło: Flajolet P., Sedgewick R. *Analytic Combinatorics*, Theorem VII.3, p. 468.

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Theorem (4)

Liczba generalizowanych ścieżek Dycka z adnotacjami, o wielkości t , z parametrami $(s_j, C_j)_{j \in \mathcal{T}}$, wynosi co najwyżej

$$o \left(\left(\frac{Q(x)}{x} \right)^t \right),$$

gdzie $Q(x) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j x^{s_j}$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$.

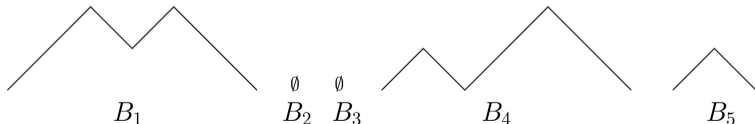
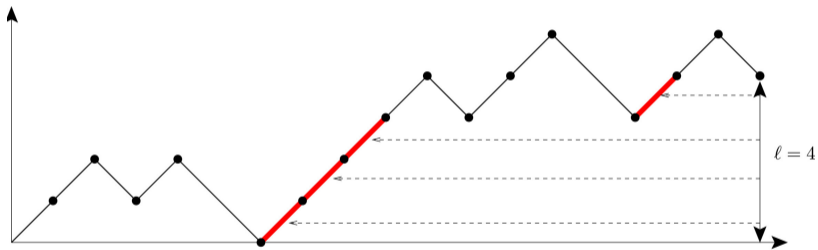
Dowód:

Niech \mathcal{R} będzie zbiorem generalizowanych ścieżek Dycka z adnotacjami, z parametrami $(s_j, C_j)_{j \in \mathcal{T}}$ oraz niech $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}$ będzie podklasą ścieżek kończących się na poziomie 0 (nie generalizowanych).

Zdefiniujmy funkcje generujące \mathcal{R} i \mathcal{B} jako $R(y) = \sum_{t \geq 0} r_t y^t$ i $B(y) = \sum_{t \geq 0} b_t y^t$, gdzie r_t i b_t odpowiadają ilości elementów rozmiaru t w odpowiednio \mathcal{R} i \mathcal{B} . Chcemy udowodnić, że $r_t = o(\lambda^t)$ dla $\lambda = \min_{0 < x \leq 1} \frac{Q(x)}{x}$.

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Niech $\mathcal{R}_l \subseteq \mathcal{R}$ będzie podzbiorem \mathcal{R} ścieżek kończących się na poziomie l . Generalizowana ścieżka z adnotacjami $R \in \mathcal{R}_l$ może być podzielona na l kroków “w górę” oraz $l + 1$ generalizowanych ścieżek z adnotacjami $\{B_1, B_2, \dots, B_{l+1}\} \subseteq \mathcal{B}$.



Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Zatem funkcja generująca R_l ma postać $R_l(y) = y^l B(y)^{l+1}$, stąd

$$R(y) = \sum_{0 \leq l \leq n} R_l(y) = \sum_{0 \leq l \leq n} y^l B(y)^{l+1}.$$

Niech $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}$ będzie zbiorem ścieżek Dycka z adnotacjami kończących się “spadkiem” z adnotacją (j, k) dla pewnego k (o możliwych C_j wartościach). Ścieżka $R \in \mathcal{B}_j$ kończy się ostatnim krokiem “w górę” i ostatnim spadkiem “w dół” o długości s_j . Podścieżka R' utworzona z R poprzez usunięcie ostatniego kroku “w górę” i spadku “w dół” należy do \mathcal{R}_{s_j-1} . Zatem funkcja generująca \mathcal{B}_j ma postać $B_j(y) = R_{s_j-1}(y) \times yC_j = y^{s_j} C_j B(y)^{s_j}$. Stąd, ponieważ ścieżka $R \in \mathcal{B}$ jest pusta lub kończy się spadkiem opisanym przez (j, k) , mamy:

$$B(y) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} B_j(y) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} y^{s_j} C_j B(y)^{s_j}.$$

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Jeśli $s_j = 1$ dla wszystkich $j \in \mathcal{T}$, mamy $\frac{Q(x)}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j$ z definicji, $\lambda = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j$ oraz $b_t = \left(\sum_{j \in \mathcal{T}} C_j\right)^t$. Zatem $b_t = (\lambda - 1)^t$.

Z poprzedniego równania otrzymujemy $r_t = \sum_{0 \leq l \leq n} \binom{t}{l} (\lambda - 1)^{t-l}$. Dodatkowo $r_t < (n + 1)t^{n+1}(\lambda - 1)^t$, a więc $r_t = o(\lambda^t)$.

Funkcja $B(y)$ nie należy do schematu gładkich funkcji niejawnych, więc wprowadzamy funkcję $A(y)$ taką, że $A(y) = B(y^{\frac{1}{d}}) - 1$, gdzie $d = \gcd\{s_j \mid j \in \mathcal{T}\}$. Udowodnimy, że $A(y)$ należy do schematu.

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Zauważmy, że wielkość dowolnej ścieżki z \mathcal{B} jest wielokrotnością d . Z tego otrzymujemy:

$$B(y) = \sum_{t \geq 0} b_t y^t = \sum_{t \text{ multiple of } d} b_t y^t$$

A więc $B(y^{\frac{1}{d}}) = 1 + \sum_{t \geq 1} b_{dt} y^t$, z czego wynika $A(y) = \sum_{t \geq 0} a_t y^t$ ($a_0 = 0, a_t = b_{dt} \forall t \geq 1$).

Zatem funkcja $A(y)$ jest analityczna w 0, $a_0 = 0, a_t \geq 0 \forall t \geq 0$.

Dla każdego odpowiednio dużego t , wartość dt może być wyrażona przez sumę wszystkich s_j , zatem również $a_t = b_{dt} > 0$. Wnioskujemy, że $A(y)$ nie jest periodyczna.

Korzystając z wcześniejszej definicji $B(y)$ mamy $A(y) = G(y, A(y))$ dla funkcji G danej:

$$G(y, z) = \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j y^{\frac{s_j}{d}} (z + 1)^{s_j}$$

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Zauważmy, że

$$G(y, z) = \sum_{j \in \mathcal{T}} \sum_{0 \leq i \leq s_j} \binom{s_j}{i} C_j y^{\frac{s_j}{d}} z^i$$

zatem $G(y, z)$ spełnia poniższe warunki:

- (a) $G(y, z)$ jest analityczna w dziedzinie $|y| < +\infty$ i $|z| < +\infty$.
- (b) Podstawiając dla $G(y, z) = \sum_{m, n \geq 0} g_{m, n} y^m z^n$, współczynniki G spełniają $g_{m, n} \geq 0$, $g_{0, 0} = 0$, $g_{0, 1} = 0$ i $g_{\frac{s_j}{d}, s_j} > 0$ dla $j \in \mathcal{T}$ takich, że $s_j \geq 2$.

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

(c) Istnieją dwie dodatnie liczby r i s spełniające układ równań:

$$G(r, s) = s, \quad G_z(r, s) = 1$$

Oznaczając $X = r^{\frac{1}{d}}(s + 1)$, równania te zostają przekształcone w:

$$\sum_{j \in \mathcal{T}} C_j X^{s_j} = s, \quad \sum_{j \in \mathcal{T}} s_j C_j X^{s_j} = s + 1.$$

Odejmując drugie od pierwszego otrzymujemy, że X jest unikalnym dodatnim pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, zatem pierwsze równanie wprost wyznacza s . Dodając 1 z obu stron pierwszego równania i następnie przemnażając je przez $r^{\frac{1}{d}}$ otrzymujemy

$$r = \left(\frac{X}{Q(X)} \right)^d.$$

Liczba generalizowanych ścieżek z adnotacjami

Stąd $A(y) = \sum_{t \geq 0} a_t y^t$ spełnia schemat gładkich funkcji niejawnych z systemem charakterystycznym (r, s) .

Z Twierdzenia 7 mamy $a_t = O(t^{-\frac{3}{2}} r^{-t})$, z czego wnioskujemy $a_t = o(r^{-t})$ i $b_t = o(r^{-\frac{t}{d}}) = o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right)$.

X jest unikalnym dodatnim pierwiastkiem wielomianu $P(X)$, co kończy dowód.

Theorem (4)

Liczba generalizowanych ścieżek Dycka z adnotacjami, o wielkości t , z parametrami $(s_j, C_j)_{j \in \mathcal{T}}$, wynosi co najwyżej

$$o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right),$$

gdzie $Q(x) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j x^{s_j}$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$.

Liczba rejestrów

Lemma (8)

Algorytm `AcyclicColoringGamma_G` może stworzyć co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów R .

Dowód:

Z twierdzenia czwartego, `AcyclicColoringGamma_G` może stworzyć co najwyżej $o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right)$ różnych rejestrów, gdzie $Q(x) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j x^{s_j}$ i $x \in [0, 1]$, z parametrami $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, $C_1 = \Delta$, $s_1 = 1$, $C_k = \frac{1}{2} \gamma \Delta^{2k-2}$ i $s_k = 2k - 2$ dla $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Stąd otrzymujemy:

$$Q(x) = 1 + \Delta x + \sum_{2 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{2} \gamma \Delta^{2i-2} x^{2i-2} < 1 + \Delta x + \frac{\gamma \Delta^2 x^2}{2 - 2\Delta^2 x^2}$$

dla $x < \frac{1}{\Delta}$. Podstawiając $X = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{2}{\gamma+2}}$ otrzymujemy:

$$\frac{Q(X)}{X} < \Delta \sqrt{\frac{\gamma+2}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma+2}} + 1\right) = \Delta(1 + \sqrt{2\gamma+4}) \leq \kappa.$$

Lemma (8)

Algorytm `AcyclicColoringGamma_G` może stworzyć co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów R .

Dowód:

Podstawiając $X = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{2}{\gamma+2}}$ otrzymujemy:

$$\frac{Q(X)}{X} < \Delta \sqrt{\frac{\gamma+2}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma+2}} + 1 \right) = \Delta(1 + \sqrt{2\gamma+4}) \leq \kappa.$$

Ponieważ $\gamma \geq 1$, to $\frac{2}{\gamma+2} < 1$, a więc $0 < X < \frac{1}{\Delta} \leq 1$. Zatem algorytm `AcyclicColoringGamma_G` produkuje co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów, co kończy dowód.



Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla dowolnego G

Theorem (1)

Dla każdego grafu G z maksymalnym stopniem wierzchołka $\Delta \geq 24$ spełnione jest

$$\chi_a(G) < \min \left\{ \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14, \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1 \right\}.$$

Twierdzenie udowodnimy w dwóch krokach:

1. Udowodnimy, że dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 24$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14$.
2. Udowodnimy, że dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 9$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1$.

Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla dowolnego G

\prec – porządek liniowy wierzchołków G

$N(u)$ – zbiorów sąsiadów u , $N^2(u)$ – zbiór wierzchołków oddalonych o 2 od u

$N(u, v) = N(u) \cap N(v)$ oraz $deg(u, v) = |N(u, v)| - \forall(u, v)$ takich, że $u \notin N(v)$

\prec_u – silny porządek częściowy na $N^2(u)$, taki, że $u \prec_u w \Leftrightarrow deg(u, v) < deg(u, w)$

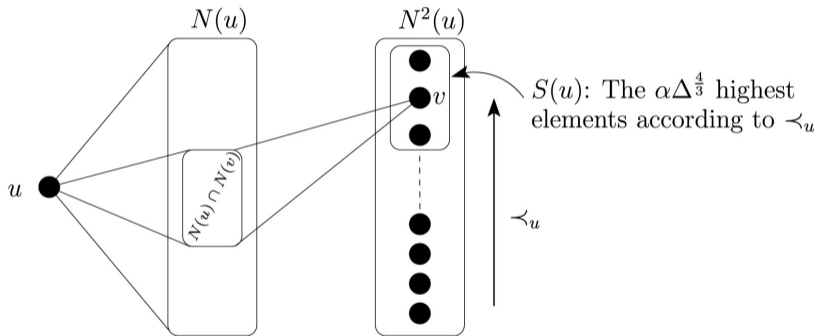
Para wierzchołków (u, v) z $v \in N^2(u)$ jest **parą specjalną** jeśli istnieje mniej niż $\alpha\Delta^{\frac{4}{3}}$ (α jest stałą, do której wrócimy później) wierzchołków w takich, że $v \prec_u w$. Zatem

(u, v) jest specjalna $\Leftrightarrow v$ jest jednym z $\alpha\Delta^{\frac{4}{3}}$ największych elementów \prec_u .

Zauważmy, że (u, v) może być specjalna nawet jeśli (v, u) nie jest. Oznaczmy $S(u) \subseteq N^2(u)$ jako zbiór wierzchołków v takich, że para (u, v) jest specjalna. Z definicji,

$$|S(u)| = \min \left\{ \alpha\Delta^{\frac{4}{3}}, |N^2(u)| \right\}.$$

Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla dowolnego G



Dowód część 1

Dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 24$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14$.

Przeprowadźmy dowód nie wprost. Niech κ będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $\kappa < \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14$:

$$\kappa = \left\lceil \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 15 \right\rceil$$

Skonstruujemy algorytm biorący na wejście wektor $V \in \{1, 2, \dots, \kappa\}^t$ i zwracający częściowe acyliczne kolorowanie $\varphi : V(G) \rightarrow \{\cdot, 1, 2, \dots, \kappa\}$ grafu G (gdzie \cdot oznacza wierzchołek niepokolorowany) i rejestr operacji R .

Dowód część 1 - algorytm AcyclicColoring_G

Algorithm 2: ACYCLICCOLORING_G

Input : V (vector of length t).**Output**: (φ, R) .

```
1 for all  $v$  in  $V(G)$  do
2    $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
3  $R \leftarrow \text{newfile}()$ 
4 for  $i \leftarrow 1$  to  $t$  do
5   Let  $v$  be the smallest (w.r.t.  $\prec$ ) uncolored vertex of  $G$ 
6    $\varphi(v) \leftarrow V[i]$ 
7   Write "Color  $\backslash n$ " in  $R$ 
8   if  $\varphi(v) = \varphi(u)$  for  $u \in N(v)$  then
9     // Proper coloring issue
10     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
11    Write "Uncolor, neighbor  $u \backslash n$ " in  $R$ 
12  else if  $\varphi(v) = \varphi(u)$  for  $u \in S(v)$  then
13    // Special couple issue
14     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
15    Write "Uncolor, special  $u \backslash n$ " in  $R$ 
16  else if  $v$  belongs to a bicolored cycle of length 4 ( $v = u_1, u_2, u_3, u_4$ ) then
17    // Bicolored cycle issue
18     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
19     $\varphi(u_2) \leftarrow \bullet$ 
20    Write "Uncolor, cycle  $(u_1, u_2, u_3, u_4) \backslash n$ " in  $R$ 
21  else if  $v$  belongs to a bicolored path of length 6 ( $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ) with  $u_2 = v$  and  $u_1 \prec u_3$  then
22    // Bicolored path issue
23     $\varphi(u_1) \leftarrow \bullet$ 
24     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
25     $\varphi(u_3) \leftarrow \bullet$ 
26     $\varphi(u_4) \leftarrow \bullet$ 
27    Write "Uncolor, path  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \backslash n$ " in  $R$ 
28 return  $(\varphi, R)$ 
```

Dowód część 1

Dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 24$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14$.

Dowód analogiczny jak przy Twierdzeniu 2.

Udowodnimy, że funkcja mapująca V na (φ, R) jest iniekcją (Lemat 9).

Liczba możliwych wejść V jest równa dokładnie κ^t .

Liczba możliwych częściowych acyklicznych κ -kolorowań φ grafu G wynosi $(1 + \kappa)^n$, a liczba możliwych rejestrów wyjściowych – $o(\kappa^t)$ (Lemat 10).

Zatem, liczba możliwych wyjść (φ, R) jest rzędu $o(\kappa^t)$ dla odpowiednio dużego t .

Zauważając, że liczba możliwych wyjść jest mniejsza od liczby możliwych wejść, choć funkcja mapująca jest iniekcją, dochodzimy do sprzeczności – co kończy dowód.



Odtwarzanie kolorów V_i

Lemma (9)

Dla danego (φ_i, R_i) z algorytmu `AcyclicColoring_G`, możemy odtworzyć odpowiadające im, unikalne V_i .

Dowód:

Zauważmy, że w każdym kroku algorytmu `AcyclicColoring_G` dodajemy do Rejestru linię "Color" oraz potencjalnie linię "Uncolor". Zatem patrząc na R wiemy, czy ostatni krok zakończony był kolorowaniem czy odkolorowywaniem.

Najpierw udowodnimy przez indukcję na i fakt, że R_i jednoznacznie wyznacza zbiór pokolorowanych wierzchołków w kroku i ($\bar{\varphi}_i$).

Następnie udowodnimy przez indukcję, że para (φ_i, R_i) pozwala wyznaczyć V_i .

Odtwarzanie kolorów V_i

R_i jednoznacznie wyznacza zbiór pokolorowanych wierzchołków w kroku i ($\bar{\varphi}_i$).

1. Zauważmy, że R_1 na pewno zawiera dokładnie jedną linię będącą linią “Color” – zatem v_1 jest tym pojedynczym pokolorowanym wierzchołkiem (najmniejszym względem \prec).
2. Dla $i \geq 2$, możemy jednoznacznie wyznaczyć R_{i-1} z R_i poprzez usunięcie ostatniej linii “Color” (oraz następującej po niej “Uncolor”, jeśli wysąpiła). Z założenia indukcyjnego R_{i-1} jednoznacznie wyznacza zbiór pokolorowanych wierzchołków w kroku $i-1$. W kroku i -tym pokolorowany zostaje najmniejszy niepokolorowany wierzchołek względem \prec . Jeśli nastąpiła linia “Uncolor”, jednoznacznie wskazuje ona które wierzchołki odkolorowano.

Zatem możemy jednoznacznie wyznaczyć $\bar{\varphi}_i$ odpowiadające rejestrowi R_i przy użyciu R_{i-1} .



Odtwarzanie kolorów V_i

Para (φ_i, R_i) pozwala jednoznacznie wyznaczyć V_i .

1. (φ_1, R_1) jednoznacznie wyznacza V_1 : v_1 jest jedynym pokolorowanym wierzchołkiem, więc $V[1] = \varphi_1(v_1)$.
2. Dla $i \geq 2$, rejestr R_{i-1} wyznacza $\bar{\varphi}_{i-1}$, zatem znamy najmniejszy niepokolorowany wierzchołek v na początku i -tego kroku. Rozpatrzmy dwa przypadki:
 - 2.1 Jeśli i -ty krok to krok jedynie kolorujący, to możemy wyznaczyć φ_{i-1} jako kolorowanie takie, że $\varphi_{i-1}(u) = \varphi_i(u) \forall u \neq v$ i $\varphi_{i-1}(v) = \cdot$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że (φ_{i-1}, R_{i-1}) wyznacza V_{i-1} i wyznaczamy V_i poprzez modyfikację $V[i] = \varphi_i(v)$.
 - 2.2 Jeśli i -ty krok odkolorowywał wierzchołki, to ostatnia linia R_i pozwala nam na wyznaczenie zbioru wierzchołków, które zostały odkolorowane w i -tym kroku, a zatem również φ_{i-1} . Z założenia indukcyjnego (φ_{i-1}, R_{i-1}) wyznacza V_{i-1} . V_i wyznaczamy następująco:
 - Jeśli ostatnia linia to "Uncolor, neighbour" u , to $V[i] = \varphi_i(u)$.
 - Jeśli ostatnia linia to "Uncolor, special" u , to $V[i] = \varphi_i(u)$.
 - Jeśli ostatnia linia to "Uncolor, cycle" (u_1, u_2, u_3, u_4) , to $V[i] = \varphi_i(u_3)$.
 - Jeśli ostatnia linia to "Uncolor, path" $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, to $V[i] = \varphi_i(u_6)$.



Lemma (10)

Algorytm `AcyclicColoring_G` tworzy co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów.

Dowód:

W rejestrze R znajduje się dokładnie t linii "Color", oraz (potencjalnie) pewna liczba linii "Uncolor" różnych typów.

Niech $\mathcal{T} = \{N, S, C, P\}$ będzie zbiorem typów "złych wydarzeń" i s_j liczbą odkolorowywanych wierzchołków przy wydarzeniu typu j . Wartości s_j wynoszą odpowiednio $s_N = 1$, $s_S = 1$, $s_C = 2$, $s_P = 4$.

Liczba rejestrów tworzonych przez AcyclicColoring_G

Policzmy liczbę możliwych do wyprodukowania wpisów do rejestru (C_j), będących skutkiem wydarzenia typu j .

- Wydarzenie N : Δ wpisów, gdzie Δ to liczba sąsiadów wierzchołka – $C_N = \Delta$.
- Wydarzenie S : $|S(v)| \leq \alpha \Delta^{\frac{4}{5}}$ wpisów – $C_S = \alpha \Delta^{\frac{4}{3}}$.
- Wydarzenie C : tyle wpisów, ile jest indukowanych 4-elementowych cykli zawierających wierzchołek v i nie zawierających wierzchołków z $S(v)$, zatem $C_C = \frac{\Delta^{\frac{8}{3}}}{8\alpha}$ (*).
- Wydarzenie P : tyle wpisów, ile jest 6-ścieżek $P = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ takich, że $u_2 = v$ i $u_1 \prec u_3$. Zatem $C_P = \frac{1}{2} \Delta (\Delta - 1)^4$ (**).

Liczba rejestrów tworzonych przez AcyclicColoring_G

Theorem (4)

Liczba o wielkości t , z parametrami $(s_j, C_j)_{j \in \mathcal{T}}$, wynosi co najwyżej

$$o\left(\left(\frac{Q(x)}{x}\right)^t\right), \quad Q(x) = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} C_j x^{s_j}, \quad x \in [0, 1].$$

Dowód dokończymy przy użyciu twierdzenia 4. Rozważmy wielomian $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 + \sum_{i \in \mathcal{T}} C_i x^{s_i} = 1 + C_N x^{s_N} + C_S x^{s_S} + C_C x^{s_C} + C_P x^{s_P} \\ &= 1 + \Delta x + \alpha \Delta^{\frac{4}{3}} x + \frac{\Delta^{\frac{8}{3}}}{8\alpha} x^2 + \frac{1}{2} \Delta (\Delta - 1)^4 x^4. \end{aligned}$$

Podstawiając $X = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{\Delta^{\frac{4}{3}}}$ otrzymujemy:

$$\frac{Q(X)}{X} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} + \alpha\right) \Delta^{\frac{4}{3}} + (8\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} + 1) \Delta - 32\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} + \frac{8\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{\Delta} \left(6 - \frac{4}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\right).$$

Liczba rejestrów tworzonych przez AcyclicColoring_G

W celu zminimalizowania wartości $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} + \alpha$ podstawiamy $\alpha = \frac{1}{2}$ uzyskując $X = \frac{2}{\Delta^{\frac{4}{3}}}$ i

$$\frac{Q(X)}{X} = \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 16 + \frac{24}{\Delta} - \frac{16}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta^3} < \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 15 \leq \kappa \text{ o ile } \Delta \geq 24.$$

Ponieważ $0 < X \leq 1$ dla $\Delta \geq 24$, algorytm AcyclicColoring_G wytwarza co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów z twierdzenia 4, co kończy dowód. \square

Zauważmy, że podstawienie $\alpha = \frac{1}{2}$ nie jest zawsze optymalne, w szczególności dla małych Δ . Np. dla $\Delta = 27$ użycie $\alpha = 0.225$ pozwala uzyskać 194 kolory zamiast 242 danych przez $\alpha = 0.5$. Optymalne wartości α dla wybranych Δ widnieją poniżej.

Δ	27	28	29	30	100	1000	10000	100000	1000000
α	0.225	0.225	0.226	0.226	0.25	0.32	0.384	0.434	0.465

Liczba indukowanych 4-elementowych cykli

*

Dla danego grafu G z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ , dla dowolnego wierzchołka v istnieje co najwyżej $\frac{\Delta^3}{8\alpha}$ indukowanych 4-elementowych cykli przechodzących przez v i nie zawierających wierzchołków z $S(v)$.

Dowód:

Istnieje co najwyżej Δ^2 krawędzi pomiędzy $N(v)$ i $N^2(v)$.

Weźmy $d \in \mathbb{Z}$ takie, że $\deg(u, v) \geq d \Leftrightarrow u \in S(v)$.

Zatem istnieje co najmniej $d|S(v)|$ krawędzi pomiędzy $N(v)$ i $S(v)$.

Wnioskujemy, że istnieje co najwyżej $\Delta^2 - d\alpha\Delta^{\frac{4}{3}}$ krawędzi pomiędzy $N(v)$ i $\bar{S}(v) = N^2(v) \setminus S(v)$, oraz

$$\sum_{u \in \bar{S}(v)} \deg(v, u) \leq \Delta^2 - d\alpha\Delta^{\frac{4}{3}}.$$

Liczba indukowanych 4-elementowych cykli

*

Dla danego grafu G z maksymalnym stopniem wierzchołka Δ , dla dowolnego wierzchołka v istnieje co najwyżej $\frac{\Delta^{\frac{8}{3}}}{8\alpha}$ indukowanych 4-elementowych cykli przechodzących przez v i nie zawierających wierzchołków z $S(v)$.

Dowód:

Zbiór indukowanych 4-elementowych cykli przechodzących przez v i pewne $u \in N^2(v)$ stanowi bijekcję na pary $\{ux, uy\}$, $x \neq y$ i $\{x, y\} \subseteq N(u, v)$, zatem istnieje $\binom{\deg(u, v)}{2}$ takich cykli.

Sumując dla wszystkich wierzchołków z $\bar{S}(v)$ otrzymujemy, że jest to mniej niż

$K = \frac{1}{2} \sum_{u \in \bar{S}(v)} \deg(v, u)^2$. Ponieważ $\deg(v, u) \leq d$, to wnioskujemy, że $K \leq K(d)$ dla

$K(d) = \frac{1}{2}(\Delta^2 - d\alpha\Delta^{\frac{4}{3}})d$. $K(d)$ osiąga największą wartość dla $d = \frac{\Delta^{\frac{2}{3}}}{2\alpha}$, zatem podstawiając:

$$K \leq K\left(\frac{\Delta^{\frac{2}{3}}}{2\alpha}\right) = \frac{\Delta^{\frac{8}{3}}}{8\alpha}.$$



Liczba 6-ścieżek

**

Dla danego grafu G z maksymalnym stopniem Δ , dla dowolnego wierzchołka v istnieje co najwyżej $\frac{1}{2}\Delta(\Delta - 1)^4$ ścieżek $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ takich, że $u_2 = v$ i $u_1 \prec u_3$.

Dowód:

Dla danego wierzchołka v , istnieje $\binom{\Delta}{2}$ możliwości wybrania u_1 i u_3 , a następnie $\Delta - 1$ możliwych wierzchołków u_{i+1} dla $i \geq 3$.

$$\binom{\Delta}{2} * (\Delta - 1)^3 = \frac{\Delta!}{2(\Delta - 2)!} * (\Delta - 1)^3 = \frac{1}{2}\Delta(\Delta - 1)^4$$

□

Ograniczenie $\chi_a(G)$ dla dowolnego G

Theorem (1)

Dla każdego grafu G z maksymalnym stopniem wierzchołka $\Delta \geq 24$ spełnione jest

$$\chi_a(G) < \min \left\{ \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14, \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1 \right\}.$$

Twierdzenie udowodnimy w dwóch krokach:

1. Udowodnimy, że dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 24$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + 5\Delta - 14$. \square
2. Udowodnimy, że dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 9$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1$.

Dowód część 2

Dla danego grafu G o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta \geq 9$, $\chi_a(G)$ jest ograniczone z góry przez $\frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} + 1$.

Poprzednio rozważaliśmy 4 typy “złych wydarzeń”, teraz będziemy rozpatrywać inne dla lepszych oszacowań dla dużych Δ .

Rozpatrywać będziemy 3 “złe wydarzenia”:

1. Wydarzenie N : G zawiera jednokolorową krawędź vu dla pewnego u .
2. Wydarzenie S : G zawiera parę specjalną (v, u) , gdzie u i v mają ten sam kolor.
3. Wydarzenie k : G zawiera dwukolorowy cykl długości $2k$: $(u_1, u_2, \dots, u_{2k})$ dla $k \geq 2$, gdzie $v = u_2$ i $u_1 \prec u_3$.

Dowód część 2 – algorytm AcyclicColoring-V2_G

Algorithm 3: ACYCLICCOLORING-V2_G

Input : V (vector of length t).

Output: (φ, R) .

```
1 for all  $v$  in  $V(G)$  do
2    $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
3  $R \leftarrow \text{newfile}()$ 
4 for  $i \leftarrow 1$  to  $t$  do
5   Let  $v$  be the smallest (w.r.t.  $\prec$ ) uncolored vertex of  $G$ 
6    $\varphi(v) \leftarrow V[i]$ 
7   Write "Color \n" in  $R$ 
8   if  $\varphi(v) = \varphi(u)$  for  $u \in N(v)$  then
9     // Proper coloring issue
10     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
11    Write "Uncolor, neighbor  $u$  \n" in  $R$ 
12  else if  $\varphi(v) = \varphi(u)$  for  $u \in S(v)$  then
13    // Special couple issue
14     $\varphi(v) \leftarrow \bullet$ 
15    Write "Uncolor, special  $u$  \n" in  $R$ 
16  else if  $v$  belongs to a bicolored cycle of length  $2k$  ( $k \geq 2$ ), say  $(u_1, u_2 = v, u_3, \dots, u_{2k})$  with  $u_1 \prec u_3$  then
17    // Bicolored cycle issue
18    for  $j \leftarrow 1$  to  $2k - 2$  do
19       $\varphi(u_j) \leftarrow \bullet$ 
20    Write "Uncolor, cycle  $(u_1, \dots, u_{2k})$  \n" in  $R$ 
21 return  $(\varphi, R)$ 
```

Dowód część 2

Niech $\kappa = \left\lceil \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}-4}} \right\rceil$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathcal{T} = \{N, S, 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{2}\}$ – zbiór “złych wydarzeń”.

Zauważmy, że każdy krok “UncoLor” odkolorywuje pewną liczbę wierzchołków s w zależności od typu. Odpowiednio: $s_N = 1$, $s_S = 1$ i $s_k = 2k - 2$.

- Wydarzenie N może stworzyć Δ różnych wpisów w rejestrze – $C_N = \Delta$.
- Wydarzenie S może stworzyć $|S(v)| \leq \frac{1}{2}\Delta^{\frac{4}{3}}$ różnych wpisów w rejestrze – $C_S = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{4}{3}}$.
- Wydarzenie typu k : liczba zależy od liczby cykli. Dla cykli długości 4 istnieje co najwyżej $\frac{1}{4}\Delta^{\frac{8}{3}}$ indukowanych cykli przechodzących przez v i omijających $S(v)$ (udowodnione wcześniej), zatem $C_2 = \frac{1}{4}\Delta^{\frac{8}{3}}$. Dla $k \geq 3$ $C_k = \Delta^{2k-\frac{4}{3}}$ (***)

Dowód część 2

Rozważmy następujący wielomian $Q(x)$:

$$\begin{aligned}Q(x) &= 1 + \sum_{i \in T} C_i x^{s_i} \\&= 1 + C_N x^{s_N} + C_S x^{s_S} + C_2 x^{s_2} + \sum_{k \geq 3}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k x^{s_k} \\&= 1 + \Delta x + \frac{1}{2} \Delta^{\frac{4}{3}} x + \frac{1}{4} \Delta^{\frac{8}{3}} x^2 + \sum_{k \geq 3}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta^{2k - \frac{4}{3}} x^{2k-2} \\&< 1 + \Delta x + \frac{1}{2} \Delta^{\frac{4}{3}} x + \frac{1}{4} \Delta^{\frac{8}{3}} x^2 + \frac{\Delta^{\frac{14}{3}} x^4}{1 - \Delta^2 x^2}, \quad \text{dla } x < \frac{1}{\Delta}.\end{aligned}$$

Dowód część 2

Podstawiając $X = \frac{2}{\Delta^{\frac{4}{3}}}$, mamy $X \leq \frac{1}{\Delta}$ dla $\Delta \geq 9$, a zatem:

$$\frac{Q(X)}{X} < \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta + \frac{8\Delta^{\frac{4}{3}}}{\Delta^{\frac{2}{3}} - 4} \leq \kappa.$$

Więc z Twierdzenia 4 algorytm `AcyclicColoring-V2_G` produkuje co najwyżej $o(\kappa^t)$ różnych rejestrów, co kończy dowód.



Ilość cykli dla $k \geq 3$

Dla $k \geq 3$ istnieje co najwyżej $\Delta^{2k-\frac{4}{3}}$ cykli długości $2k$ $(u_1, u_2, \dots, u_{2k})$ przechodzących przez v , $v = u_2$ oraz $u_1 \prec u_3$ takich, że (u_1, u_{2k-1}) i $(u_{2k-1}, u+1)$ nie są parami specjalnymi.

Dowód:

Ponieważ $u_1 \prec u_3$, istnieje $\binom{\Delta}{2}$ możliwych wyborów (u_1, u_3) . Znając u_i , możemy wybrać u_{i+1} na Δ sposobów dla $3 \leq i \leq 2k-2$. Niech:

(r, s) – nie-specjalna para odpowiadająca albo (u_1, u_{2k-1}) , albo (u_{2k-1}, u_1) . $s \in N^2(r) \setminus S(r)$.
 $d = \max\{\deg(r, u) \mid u \in N^2(r) \setminus S(r)\}$.

Istnieje co najmniej $d|S(r)|$ krawędzi pomiędzy $N(r)$ i $S(r)$, i co najwyżej $\Delta^2 - \frac{d}{2}\Delta^{\frac{4}{3}}$ krawędzi między $N(r)$ oraz $N^2(r) \setminus S(r)$. Z tego $d \leq 2\Delta^{\frac{2}{3}}$, zatem istnieje $2\Delta^{\frac{2}{3}}$ sposobów wybrania u_{2k} .

$$\binom{\Delta}{2} \times \Delta^{2k-4} \times 2\Delta^{\frac{2}{3}} = \frac{\Delta \times (\Delta - 1)}{2} \times 2\Delta^{2k-4+\frac{2}{3}} = \Delta(\Delta - 1) \times \Delta^{2k-\frac{10}{3}} = (\Delta - 1) \times \Delta^{2k-\frac{7}{3}}$$

Koniec

Dziękuję



Daniel Gonçalves, Mickael Montassier, Alexandre Pinlou (2020)

Acyclic coloring of graphs and entropy compression method

Discrete Mathematics vol. 343, no. 4.